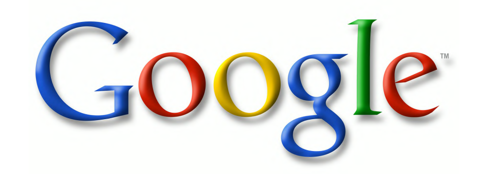


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

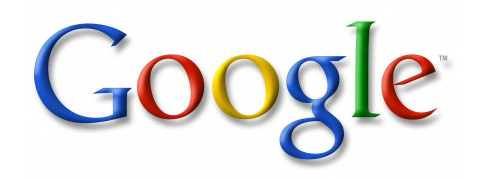
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

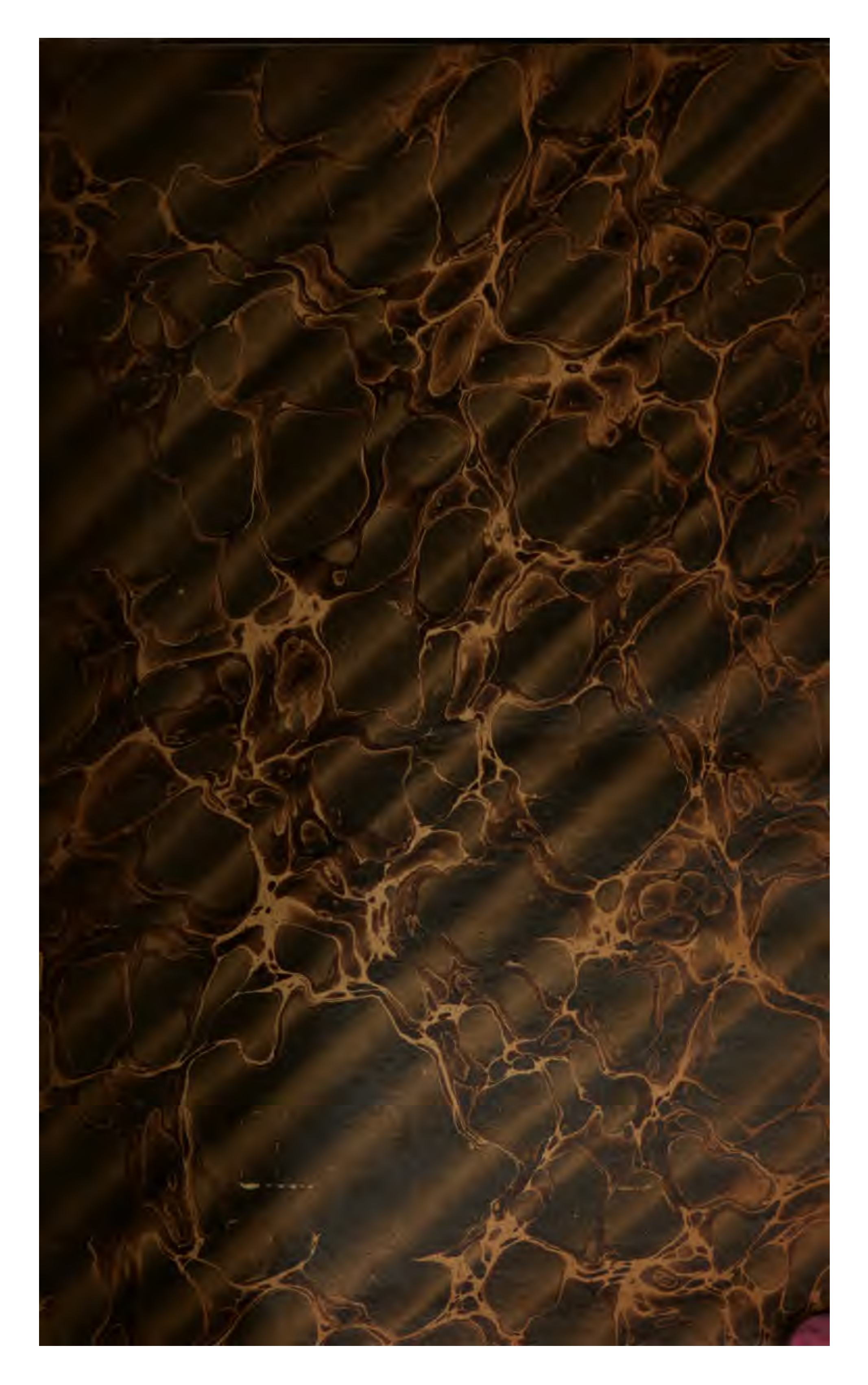


Math 358.83

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)

20 May, 1885.

SCIENCE CENTER LIBRARY



COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(TROISIÈME PARTIE)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

ANGERS, IMPRIMERIE A. BURDIN ET Cie, 4, RUE GARNIER.

COURS

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

TROISIÈME PARTIE

GÉOMÉTRIE

ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS

PAR

M. G. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE CHARLEMAGNE



PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1884

Tous droits réservés

~~VI. 33/6~~
Math 358.83

MAY 20 18
Haven Fund.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIER LIVRE

LE PLAN, LA DROITE ET LA SPHÈRE

PREMIÈRE LEÇON

Pages.

DEUXIÈME LEÇON

TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇONS

CINQUIÈME LEÇON

DEUXIÈME LIVRE

LES QUADRIQUES D'APRÈS LEUR ÉQUATION GÉNÉRALE

ONZIÈME LEÇON

DOUZIÈME LEÇON

TREIZIÈME LEÇON

QUATORZIÈME LEÇON

QUINZIÈME LEÇON

SEIZIÈME LEÇON

DIX-SEPTIÈME LEÇON

DIX-HUITIEME ET DIX-NEUVIÈME LEÇONS

VINGTIÈME LEÇON

TROISIÈME LIVRE

LES QUADRIQUES D'APRÈS LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES

VINGT-ET-UNIÈME LEÇON

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

VINGT-TROISIÈME LEÇON

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

VINGT-SIXIÈME LEÇON

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

VINGT-HUITIÈME LEÇON

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(TROISIÈME PARTIE)

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

A TROIS DIMENSIONS

PREMIER LIVRE

LE PLAN. — LA DROITE. — LA SPHÈRE

PREMIÈRE LEÇON

LES COORDONNÉES. — PREMIÈRES FORMULES

1. Définition des coordonnées cartésiennes. Imaginons trois droites XX′, YY′, ZZ′, non situées dans un même plan, mais partant d'un certain point O.

Nous prendrons ces droites pour *axes de coordonnées*, et nous choisirons les semi-droites OX, OY, OZ, pour représenter les directions positives de ces axes.

Le point O est *l'origine des coordonnées* et les plans YOX, ZOY, XOZ, sont appelés *plans de coordonnées*. Chacun d'eux, le plan YOX par exemple, sépare l'espace en deux régions ; la région positive, par rapport au plan YOX, est celle qui renferme la semi-droite OZ.

Ces conventions étant faites, les coordonnées d'un point M sont bien déterminées, *en grandeur et en signe ;* c'est ce que nous allons montrer d'abord.

Si, par le point M, on mène une droite parallèle à ZZ′, jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan XOY, le segment MC ainsi obtenu représente la valeur de la coordonnée z du point M ; cette valeur est positive ou négative suivant que le segment MC est placé dans la région positive ou négative du plan YOX.

Dans ces conditions, à un point M correspondent trois coordonnées :

$$MA = x, \quad MB = y, \quad MC = z;$$

bien déterminées.

Réciproquement si l'on donne les trois nombres x', y', z', il leur correspond *un point bien déterminé* de position, dans l'espace.

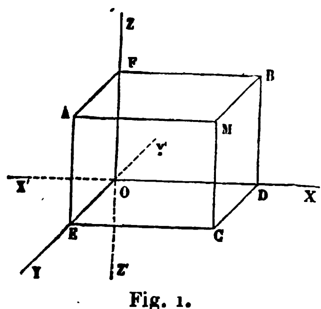


Fig. 1.

Prenons en effet $OD = x'$ et par le point D, menons un plan DBMC parallèle au plan YOZ ; tout point de ce plan a une coordonnée x, égale à x' ; et, réciproquement, tout point de l'espace qui a une coordonnée x égale à x', est situé dans ce plan.

Nous pouvons conclure de cette remarque, appliquée successivement aux valeurs données x', y', z', que le point M, obtenu par l'intersection du plan BCDM et des plans analogues ACEM, ABFM, est un point ayant pour coordonnées x', y', z' ; de plus, il n'y a pas d'autre point jouissant de cette

propriété. La position du point qui correspond à des coordonnées est donc toujours bien déterminée.

Lorsque chacun des axes est perpendiculaire sur les deux autres, on dit que le système considéré est *rectangulaire*. Il est dit *oblique* dans les autres cas. Nous ferons pourtant observer que dans certaines questions, on peut envisager *des systèmes mixtes*, et il y en a de deux espèces.

Il peut arriver que YOX soit différent de $\frac{\pi}{2}$ et que OZ soit perpendiculaire sur le plan YOX. C'est un premier exemple de système mixte.

Le second exemple est fourni par des axes dans lesquels l'angle YOX est droit, tandis que OZ est oblique sur OX et sur OY.

Il existe beaucoup d'autres moyens de représenter un point dans l'espace, mais le système que nous venons de définir, et qui a été imaginé par *Descartes*, est le seul dont nous ferons usage, dans ce cours.

Pour différencier les trois coordonnées x, y, z, et pour donner au langage plus de clarté, nous conserverons aux lettres x, y la dénomination d'*abcisse* et d'*ordonnée* que nous leur avons appliquée dans la géométrie analytique plane ; nous désignerons par le mot *cote* la troisième coordonnée z.

2. Définition générale des surfaces. La notion de la surface plane est une idée élémentaire et sur laquelle nous n'avons pas à revenir ici ; mais nous devons définir, avant d'aller plus loin, les autres surfaces.

Nous appellerons **surface** *la figure* U *engendrée par une courbe plane* V, *mobile dans l'espace, et dont le mouvement continu est tellement réglé que si l'on cherche les points communs à la figure* U, *et à un plan* P *qu'on peut supposer mobile, la section obtenue est une courbe bien déterminée.*

Par exemple, lorsque V est une ligne droite on obtient *les surfaces réglées ;* si la ligne droite passe constamment par un point fixe S, son mouvement étant réglé par la condi-

tion que la droite mobile s'appuie constamment sur une courbe fixe, on a *les surfaces coniques ;* puis, comme cas particulier, *les surfaces cylindriques*, en supposant le point S rejeté à l'infini.

3. Théorème. *Lorsqu'un point* M *est mobile sur une surface, les coordonnées vérifient constamment une certaine relation* F $(x, y, z) = 0$, *qu'on appelle équation de la surface.*

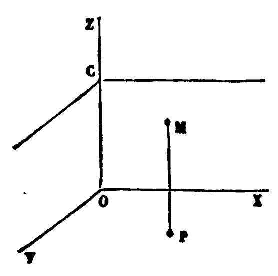


Fig. 2.

En effet, soit U la surface proposée, considérons la section faite dans U par un plan P, parallèle à YOX, et de cote $OC = h$. La courbe qui est dans le plan P est bien déterminée; elle se projette en vraie grandeur sur le plan XOY et, rapportée aux axes OX,OY, a pour équation $f(x, y) = 0$. Il faut donc qu'il existe entre x, y, et z, une certaine relation

$$(1) \quad F(x,y,z) = 0.$$

Si l'équation (1) ne renfermait pas la lettre z, on aurait $F \equiv f(x, y)$. Dans ce cas, la surface est telle que tout plan parallèle à XOY la coupe suivant une courbe V égale à la courbe V' qui, dans le plan XOY, correspond à l'équation $f(x,y) = 0$. En transportant V', parallèlement au plan YOX, à une cote quelconque, on réalise une génération de la surface considérée, génération qui prouve que cette surface appartient à l'espèce des surfaces cylindriques.

La réciproque est vraie : *si un point* M *a des coordonnées* x, y, z, *qui vérifient constamment la relation*

$$(1) \quad F(x,y,z) = 0,$$

le point M *est mobile sur une surface.*

En effet considérons la courbe V située dans le plan correspondant à l'équation $z = h$, et qui, projetée sur le plan XOY, a pour équation

$$(2) \quad F(x,y,h) = 0.$$

Cette courbe V est mobile, quand h varie ; ainsi, à toute solution de l'équation (1), correspond un point M qui appartient à une des courbes V ; et réciproquement. Le lieu des points M, points dont les coordonnées constituent une solution de l'équation (1), est donc une surface.

On remarquera que nous supposons, dans le raisonnement précédent, que la courbe V qui correspond à l'équation (2) représente une véritable courbe, au moins pour certaines valeurs de h, en nombre infini.

4. Théorème. *Si* F (x,y,z) *désigne une forme homogène par rapport aux lettres x, y, z, l'équation*

$$(1) \quad F(x,y,z) = 0,$$

représente une surface conique.

Considérons les deux équations :

$$(2) \quad z = h, \qquad (3) \quad F(x,y,h) = 0;$$

la première représente un plan P, la seconde un cylindre C. Soit V la courbe commune à ces deux surfaces et soit M un point pris sur V ; les coordonnées (x', y', h) de ce point, vérifient l'équation (1). Prenons maintenant sur la droite OM un point quelconque M' et soient (y'', y'', z'') ses coordonnées. Nous avons

$$\frac{x'}{x''} = \frac{y'}{y''} = \frac{h}{z''} = t,$$

et, par conséquent,

$$F(tx'', ty'', tz'') = 0,$$

ou, en observant que F est une forme homogène,

$$F(x'', y'', z'') = 0.$$

Ainsi le point M' et, par suite, tous les points de OM sont situés sur la surface considérée. Celle-ci peut donc être considérée comme une surface engendrée par le mouvement d'une droite, pivotant autour d'un point fixe, en s'appuyant, constamment, sur une courbe V, donnée de position ; c'est une surface conique.

5. Théorème. *Dans une équation*

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0,$$

si F *désigne la forme entière la plus générale du degré* m, *le nombre* X_m *des termes est égal à*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

Rendons l'équation (1) homogène, en remplaçant les lettres x, y, z, respectivement par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$, et posons

$$t^m F\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}\right) = \varphi(x, y, z, t).$$

La forme φ est homogène, et du degré m, par rapport aux lettres x, y, z, t ; un terme quelconque de cette forme peut se réprésenter par

$$Hx^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta, \quad (\alpha+\beta+\gamma+\delta=m)$$

et il y a autant de ces termes que l'on peut faire de combinaisons à répétition avec quatre lettres groupées m à m.

Nous avons donc (*Alg.* § 27 et 28),

$$X_m = \gamma_4^m = C_{m+4-1}^m = C_{m+3}^m = C_{m+3}^3$$

et, par conséquent,

$$X_m = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3}.$$

6. En particulier, dans les surfaces du second ordre [1], le nombre des termes est égal à 10.

Le nombre des conditions qui déterminent une surface de l'ordre m est $X_m - 1$; pour une quadrique il faut neuf conditions. On vérifie d'ailleurs directement ce résultat en observant que l'équation la plus générale de ces surfaces peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_0 = 0,$$

φ_k désignant, comme d'habitude, une forme homogène du degré K par rapport aux lettres x, y, z. Nous représenterons l'équation générale des quadriques par la notation suivante :

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

7. Définition de la courbe gauche. Lorsqu'un point M, mobile, se trouve constamment situé sur deux surfaces fixes U et V ; si, dans ses positions successives, il ne reste pas toujours dans le même plan, on dit que le lieu décrit par ce point est une courbe gauche.

En désignant par x, y, z, les coordonnées de M, ces quantités variables vérifient constamment les équations des surfaces U et V :

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} f_1(x,y,z) = 0, \\ f_2(x,y,z) = 0; \end{cases}$$

et nous dirons que ces équations sont celles de la courbe gauche.

Les courbes planes que nous connaissons déjà peuvent être considérées comme formant un cas particulier des courbes gauches ; il suffit de supposer que les coordonnées (x, y, z) vérifient constamment, outre l'équation $f_1 = 0$, une équation du premier degré en x, y, z, équation à laquelle, comme nous le verrons bientôt, correspond un plan.

1. Nous dirons aussi les *quadriques*, par abréviation.

8. Définition. *L'ordre d'une courbe* est le nombre de points qui sont communs à cette courbe et à un plan quelconque. Cette définition convient aux courbes planes pourvu que le plan choisi ne soit pas le plan même de la courbe.

Nous verrons que l'ordre d'une courbe (gauche ou plane) est, en général, égal à l'ordre de sa projection sur un plan arbitrairement choisi; nous dirons ici comment on détermine cette projection sur les plans de coordonnées.

9. Principe. *La projection d'une courbe* Γ *sur le plan* XOY *s'obtient en éliminant z entre les deux équations de la courbe.*

Soit M un point quelconque de Γ et soient x', y', z' ses coordonnées ; ces valeurs constituent une solution des équations de Γ

$$f_1(x,y,z) = 0, \quad f_2(x,y,z) = 0.$$

Les deux équations

$$f_1(x',y',z) = 0, \quad f_2(x',y',z) = 0,$$

admettent une solution commune $(z = z')$.

Le résultant des formes f_1 et f_2, la fonction R (x, y), s'annule donc par $x = x'$ et $y = y'$ et nous pouvons poser

$$R(x',y') = 0.$$

Par conséquent, le cylindre qui correspond à l'équation

$$R(x,y) = 0,$$

passe par Γ.

Réciproquement, tout point commun à ce cylindre et à l'une des surfaces proposées est un point de Γ, mais il faut que R (x,y) représente bien *le résultant* des formes f_1 et f_2.

Nous établirons maintenant quelques formules qui sont fondamentales.

PREMIÈRES FORMULES

10. Distance de deux points. Supposons d'abord que l'un des points donnés soit situé à l'origine et soient (x', y', z') les coordonnées du second point M. Nous poserons, conformément à une notation adoptée,

$$YOZ = \lambda, \quad ZOX = \mu, \quad XOY = \nu.$$

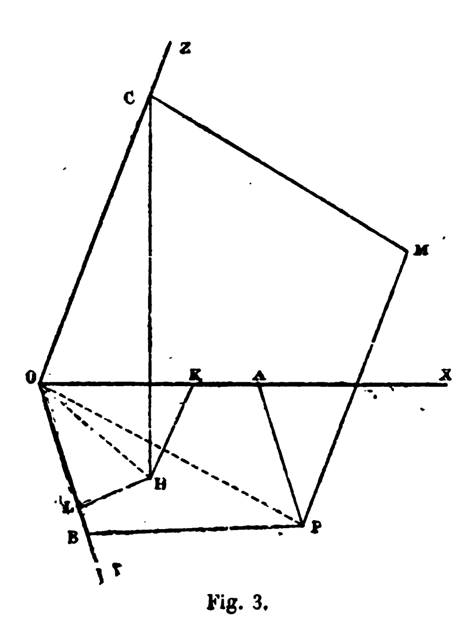


Fig. 3.

Ayant fait la construction qu'indique la figure, les droites MA, MB, MC étant parallèles, respectivement aux plans YOZ, ZOX, XOY, on a

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + z'^2 - 2z'OP \cos OPM,$$

et,

$$\overline{OP}^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y' \cos OAP = x'^2 + y'^2 + 2x'y' \cos \nu,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{OM}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2x'y' \cos \nu - 2z' \, OP \cos OPM.$$

D'ailleurs, le théorème des projections appliqué à la ligne brisée OAP et à sa résultante OP, donne

$$OP \cos POZ = x' \cos \mu + y' \cos \lambda;$$

on a donc, finalement,

$$\overline{OM}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos \lambda + 2z'x' \cos \mu + 2x'y' \cos \nu.$$

Si nous supposons maintenant que nous considérions deux points quelconques M_0 (x_0, y_0, z_0); M_1 (x_1, y_1, z_1); la droite M_0M_1 peut être considérée comme une diagonale d'un parallélipipède ayant pour côtés $x_1 - x_0$, $y_1 - y_0$, $z_1 - z_0$, et, en appliquant la formule précédente, nous avons

$$\overline{M_0M_1}^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 + 2(y_1 - y_0)(z_1 - z_0)\cos \lambda$$
$$+ 2(z_1 - z_0)(x_1 - x_0)\cos \mu + 2(x_1 - x_0)(y_1 - y_0)\cos \nu.$$

11. Volume du parallélipipède oblique. Soient (fig. 3) OA, OB, OC, les trois arêtes du parallélipipède considéré, et soit M le sommet opposé à O. Projetons le point C en H, sur YOX, et nous avons, pour l'expression du volume cherché V

$$V = OABP \, . \, CH.$$

En posant

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c,$$

il vient

$$V = ab \sin \nu \sqrt{c^2 - \overline{OH}^2}.$$

Abaissons du point H des perpendiculaires HK, HL, sur OX et sur OY; le quadrilatère inscriptible OHKL donne

$$OH = \frac{LK}{\sin \nu}$$

et, par suite,

$$\overline{OH}^2 = \frac{\overline{OL}^2 + \overline{OK}^2 - 2OL.OK \cos \nu}{\sin^2 \nu}.$$

Nous avons d'ailleurs

$$OK = c \cos\mu, \qquad OL = c \cos\lambda,$$

et la valeur de $\overline{OH}^2$ peut s'écrire sous la forme

$$\overline{OH}^2 = \frac{c^2}{\sin^2\nu}(\cos^2\lambda + \cos^2\mu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu).$$

L'expression de V devient alors

$$V = abc\sqrt{\sin^2\nu - \cos^2\lambda - \cos^2\mu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu},$$

ou

$$V = abc\sqrt{\Delta_0},$$

en posant

$$\Delta_0 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.$$

12. Discussion et calcul de la fonction Δ_0. Cette fonction Δ_0 des angles λ, μ, ν se rencontre dans plusieurs questions ; nous allons reconnaître que Δ_0 est toujours compris entre zéro et l'unité.

Nous avons d'abord (1)

$$\Delta_0 = (1 - \cos^2\lambda)(1 - \cos^2\mu) - (\cos^2\nu + \cos^2\mu\cos^2\lambda - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu),$$

ou,

$$\Delta_0 = \sin^2\lambda\sin^2\mu - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2.$$

Cette égalité peut s'écrire encore

$$\Delta_0 = (\sin\lambda\sin\mu + \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)(\cos\nu - \cos\lambda\cos\mu + \sin\lambda\sin\mu),$$

ou,

$$\Delta_0 = \{\cos(\lambda - \mu) - \cos\nu\}\{\cos\nu - \cos(\lambda + \mu)\},$$

1. Si l'on ne veut pas employer l'artifice de calcul qui suit, on prendra la méthode générale, qui n'est pas beaucoup plus longue, et qui consiste à décomposer la forme Δ_0 en la considérant comme un trinôme du second degré, par rapport à $\cos\lambda$.

ou, enfin,

$$\Delta_0 = 4\cos\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\cos\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\cos\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\cos\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

Cette expression remarquable de Δ_0 prouve que si, comme nous le supposons, les semi-droites OX, OY, OZ, forment un véritable trièdre, Δ_0 est toujours positif.

La valeur de Δ_0 est, d'ailleurs, inférieure ou égale à l'unité, car l'on a :

$$1 - \Delta_0 = \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu - 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

ou

$$1 - \Delta_0 = (\cos\lambda - \cos\mu\cos\nu)^2 + \cos^2\mu\sin^2\nu + \cos^2\nu,$$

et, par suite,

$$1 - \Delta_0 \geqslant 0.$$

Remarque. On peut aussi observer que Δ_0 est le discriminant de la forme quadratique

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.$$

On a donc

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient d'ailleurs, immédiatement, la valeur de Δ_0 en considérant le tableau

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{matrix}$$

et en retranchant, du produit des éléments écrits dans les lignes, celui des éléments placés dans les colonnes.

Ajoutons enfin que si l'on représente symboliquement, comme on l'a quelquefois proposé, par sin (λ, μ, ν) la quan-

tité $\sqrt{\Delta_0}$, valeur comprise entre zéro et l'unité, la formule qui donne le volume du parallélipipède peut s'écrire sous la forme

$$V = abc \sin(\lambda, \mu, \nu).$$

13. Angle de deux directions. (*Définition.*) Imaginons deux droites dans l'espace Δ, Δ'; et considérons, sur chacune d'elles, la direction positive; si, par l'origine, nous menons des semi-droites OI, OI', parallèles à ces directions, l'angle IOI', angle bien déterminé et défini comme nous l'avons dit dans la géométrie plane, est l'angle des deux directions positives des droites considérées.

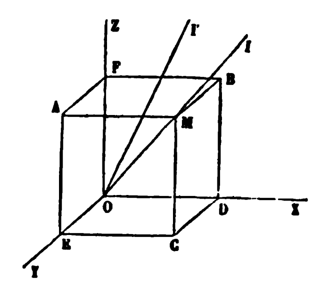


Fig. 4.

La semi-droite OI fait avec les semi-droites OX, OY, OZ, des angles que nous désignerons respectivement par α, β, γ. Nous poserons aussi quelquefois, pour abréger l'écriture,

$$\cos\alpha = A, \quad \cos\beta = B, \quad \cos\gamma = C.$$

et dans le cas où les axes de coordonnees sont rectangulaires, nous dirons que A, B, C, sont les *cosinus directeurs* de la direction OI.

14. Théorème. *La somme des carrés des cosinus directeurs est toujours égale à l'unité.*

Prenons sur OI un point M et faisons la construction qu'indique la figure 4 ; nous avons

$$(1) \quad OD = OM\cos\alpha, \quad OE = OM\cos\beta, \quad OF = OM\cos\gamma\,;$$

et, par suite,

$$\overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2 = \overline{OM}^2 (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Mais nous savons que

$$\overline{OM}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 + \overline{OF}^2,$$

nous avons donc

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

15. Angle de deux directions. (*Formule.*) Désignons par V l'angle IOI' et projetons le contour brisé ODCM et la résultante OM sur OI', nous avons,

$$OM \cos V = OD \cos\alpha' + OE \cos\beta' + OF \cos\gamma',$$

ou, en tenant compte des formules (1),

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = AA' + BB' + CC'.$$

16. Perpendicularité de deux directions. La formule que nous venons de trouver prouve que si les droites Δ, Δ', ont des directions rectangulaires, on a

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0,$$

ou, dans la notation abrégée,

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Les paramètres A, B, C; A', B', C'; vérifient aussi les égalités

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$
$$'^2 + B'^2 + C'^2 = 1.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que, en axes obliques, les cosinus des angles* α, β, γ *définis plus haut* (§ 13) *vérifient la relation*

$$\begin{vmatrix} & & & \vdots & \cos\alpha \\ & \Delta_0 & & \vdots & \cos\beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On projette le contour brisé formé par les coordonnées d'un point M et la résultante OM, sur cette droite et sur les axes de coordonnées.

On obtient ainsi quatre équations linéaires et homogènes entre x, y, z coordonnées de M et la longueur l de OM.

2. *Les axes étant obliques, démontrer que l'angle* V *de deux directions est donné par la formule :*

$$\begin{vmatrix} & & & \vdots & \cos\alpha \\ & \Delta_0 & & \vdots & \cos\beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & & 0 \end{vmatrix} + \Delta_0 \cos V = 0.$$

3. *Démontrer, en axes rectangulaires, les formules suivantes :*

$$\sin^2 V = (BC' - CB')^2 + (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2,$$

$$4\cos^2 \frac{V}{2} = (A + A')^2 + (B + B')^2 + (C + C')^2,$$

$$4\sin^2 \frac{V}{2} = (A - A')^2 + (B - B')^2 + (C - C')^2.$$

DEUXIÈME LEÇON

TRANSFORMATION DES COORDONNÉES

17. Le but de la transformation des coordonnées dans l'espace est le même que celui que nous avons indiqué dans la géométrie plane. Cette transformation est complexe; elle comprend : 1° un transport des axes, parallèlement à eux-mêmes; 2° une rotation des axes transportés, autour de l'origine nouvelle.

En appelant (x, y, z) les coordonnées d'un point M, par rapport au système (O, xyz); et (X, Y, Z) les coordonnées de ce même point par rapport aux axes nouveaux (O', XYZ); ceux-ci étant parallèles aux anciens, on a

$$(T) \quad x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta, \quad z = Z + \gamma;$$

α, β, γ, désignant les coordonnées de la nouvelle origine par rapport aux anciens axes.

Ces formules sont générales ; elles conviennent à toutes les situations respectives des deux systèmes et à toutes les positions du point M.

18. Rotations des axes autour de l'origine. Considérons maintenant deux systèmes de même origine ; désignons par A, B, C, les cosinus des angles que fait la semi-droite OX avec les semi-droites ox, oy, oz ; et ainsi des autres. Soit M un point quelconque ; construisons les coordonnées de ce point dans les deux systèmes et projetons

successivement les deux contours brisés OQPM, OSRM sur les axes ox, oy, oz. Nous obtenons ainsi les relations

$$(T')\quad \begin{aligned} x + y\cos\nu + z\cos\mu &= AX + A'Y + A''Z, \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= BX + B'Y + B''Z, \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= CX + C'Y + C''Z. \end{aligned}$$

Le déterminant des inconnues x, y, z, est justement la fonction Δ_0 que nous avons rencontrée déjà et qui, comme nous l'avons reconnu (§ 12), est toujours positive. Nous pouvons donc résoudre les équations précédentes par rapport à x, y, z; et, par suite, effectuer la transformatiou.

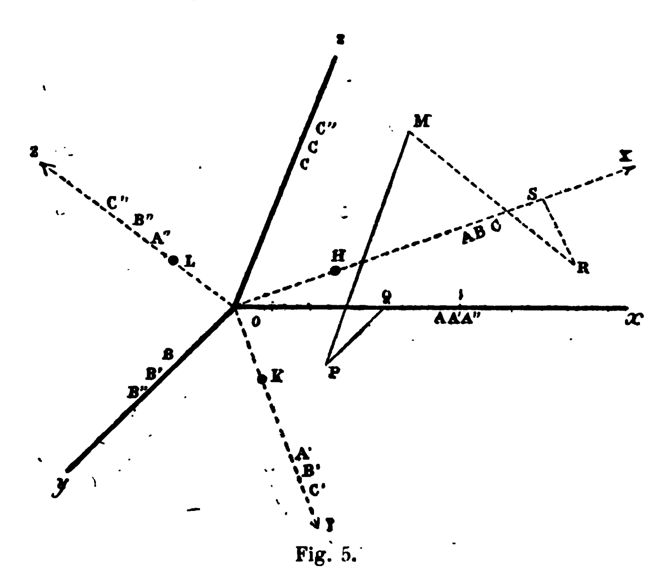


Fig. 5.

19. Introduction des paramètres directeurs. Si l'on considère une droite quelconque passant par l'origine O et, sur cette droite, un point M situé à l'unité de distance; les coordonnées de ce point s'appellent les *paramètres directeurs* de la semi-droite OM.

Prenons sur OX un point H (OH = 1) et soient a, b, c ses coordonnées; le contour brisé formé par a, b, c, et la résul-

tante OH étant projetée, successivement, sur les directions ox, oy, oz, nous avons

$$A = a + b\cos\nu + c\cos\mu,$$
$$B = a\cos\nu + b + c\cos\lambda,$$
$$C = a\cos\mu + b\cos\lambda + c.$$

En appliquant ce même principe aux points directeurs K, L, des directions OY, OZ, on obtient six relations analogues pour déterminer A', B', C' ; A'', B'', C''.

Les formules (T') deviennent alors :

$$\begin{aligned} x + y\cos\nu + z\cos\mu = aX + a'Y + a''Z \\ + (bX + b'Y + b''Z)\cos\nu \\ + (cX + c'Y + c''Z)\cos\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\cos\nu + y + z\cos\lambda = (aX + a'Y + a''Z)\cos\nu \\ + (bX + b'Y + b''Z) \\ + (cX + c'Y + c''Z)\cos\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x\cos\mu + y\cos\lambda + z = (aX + a'Y + a''Z)\cos\mu \\ + (bX + b'Y + b''Z)\cos\lambda \\ + (cX + c'Y + c''Z). \end{aligned}$$

Ces équations sont du premier degré en x, y, z ; elles admettent une solution unique, et la forme même qu'elles affectent met en évidence cette solution qui correspond aux formules [1] :

$$(T'') \quad \begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= cX + c'Y + c''Z. \end{aligned}$$

20. Relation entre les paramètres directeurs. Les quantités a, b, c, ne sont pas indépendantes et en écrivant que la distance OH est égale à l'unité, on a (§ 10),

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu = 1.$$

1. Nous avons emprunté ce calcul à une note de M. Ch. Brisse (*Nouvelles annales de mathématiques*, 1882. — Troisième série, tome I, p. 207).

21. Cas des axes rectangulaires. Dans le cas où l'on passe d'un système rectangulaire à un second système, également rectangulaire, les formules (T'), ou les formules (T''), donnent :

$$(\mathrm{R}) \left\{ \begin{aligned} x &= \mathrm{AX} + \mathrm{A'Y} + \mathrm{A''Z}, \\ y &= \mathrm{BX} + \mathrm{B'Y} + \mathrm{B''Z}, \\ z &= \mathrm{CX} + \mathrm{C'Y} + \mathrm{C''Z}. \end{aligned} \right.$$

A ces relations, il faut ajouter les suivantes, qui expriment que les deux systèmes considérés sont rectangulaires,

$$(\alpha) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2 = 1, \\ &\mathrm{A'}^2 + \mathrm{B'}^2 + \mathrm{C'}^2 = 1, \\ &\mathrm{A''}^2 + \mathrm{B''}^2 + \mathrm{C''}^2 = 1; \end{aligned} \right. \qquad (\beta) \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{AA'} + \mathrm{BB'} + \mathrm{CC'} = 0, \\ &\mathrm{A'A''} + \mathrm{B'B''} + \mathrm{C'C''} = 0, \\ &\mathrm{A''A} + \mathrm{B''B} + \mathrm{C''C} = 0. \end{aligned} \right.$$

Les formules (α) expriment : la première, que la droite OX fait avec Ox, Oy, Oz, droites qui sont deux à deux rectangulaires, des angles dont les cosinus sont A, B et C ; et, de même, pour les deux autres.

Les formules (β) expriment que les directions OX, OY, OZ sont deux à deux rectangulaires, dans un système d'axes ($O.\,xyz$) qui est lui-même rectangulaire.

En remarquant, comme l'indique la figure précédente, que les cosinus des angles que font avec les droites (OX, OY, OZ) les directions (Ox, Oy, Oz), sont respectivement A, A', A'' ; B, B', B'' ; C, C', C'' ; et en appliquant de nouveau les égalités (α) et (β) on a les relations :

$$(\alpha') \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}^2 + \mathrm{A'}^2 + \mathrm{A''}^2 = 1, \\ &\mathrm{B}^2 + \mathrm{B'}^2 + \mathrm{B''}^2 = 1, \\ &\mathrm{C}^2 + \mathrm{C'}^2 + \mathrm{C''}^2 = 1, \end{aligned} \right. \qquad (\beta') \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{AB} + \mathrm{A'B'} + \mathrm{A''B''} = 0 \\ &\mathrm{BC} + \mathrm{B'C'} + \mathrm{B''C''} = 0 \\ &\mathrm{CA} + \mathrm{C'A'} + \mathrm{C''A''} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les formules (α'), (β') sont dépendantes des formules (α) et (β)[1] ; le nombre des paramètres de la transformation est

1. Voyez : Exerc. I, de cette leçon.

égal à 9; mais, parmi ces paramètres, 3, seulement, sont indépendants et nous reviendrons tout à l'heure sur ce point en établissant les formules d'Euler. Les 9 paramètres en question doivent donc vérifier 6 relations; ces relations sont précisément constituées par les formules (α) et (β), ou par les formules (α'), (β').

22. Théorème. *L'ordre d'une surface* U, *c'est-à-dire le nombre de points qui sont communs à* U *et à une droite quelconque de l'espace, est marqué par le degré* m, *de son équation.*

Soit : $f(x, y, z) = 0$, l'équation de U, f désignant une forme entière et du degré m. Considérons, dans l'espace une droite quelconque Δ et cherchons combien U et Δ ont de points communs. A cet effet, changeons d'axes de coordonnées et prenons Δ pour nouvel axe des X. Les formules de transformation étant linéaires, la forme f, devient $F(X, Y, Z)$; F désignant une forme entière du degré m.

Cette remarque étant faite, il y a autant de points communs à U et à Δ, que l'équation

$$F(X, 0, 0) = 0,$$

a de racines. Or cette équation est du degré m, du moins en général, et quand Δ n'a pas, relativement à la surface, une direction singulière.

On peut aussi remarquer que l'ordre d'une surface est égal à celui d'une section plane de la surface, la direction du plan sécant étant quelconque; l'ordre d'une surface et celui d'une section plane sont deux nombres égaux, *en général*. Nous reviendrons tout à l'heure sur ce point (§ 26).

23. Formules d'Euler. Les formules d'Euler ont pour but d'effectuer la transformation d'un système d'axes rectangulaires à un second système également rectangulaire, sans faire usage de paramètres *surabondants*, comme le sont ceux que nous avons employés plus haut.

Nous allons faire usage, dans l'établissement de ces for-

mules, de la rotation des figures autour d'un axe, mais nous devons définir d'abord le sens de cette rotation.

Imaginons un corps tournant autour de l'axe OZ; prenons sur le corps considéré un point A et coupons la figure par un plan YOX, passant par A, perpendiculairement à OZ. Un observateur placé sur le plan YOX, les pieds en O et la tête en Z, verra tourner la semi-droite OA : tantôt de sa droite vers sa gauche, tantôt, de sa gauche vers sa droite. On dit de cette dernière rotation qu'elle est *directe;* l'autre rotation est *inverse.*

Les paramètres que nous allons introduire sont au nombre de trois ; nous les définirons d'abord.

1° Soient (O.XYZ) l'ancien système, et (O.X'Y'Z') le nouveau. Les deux plans XOY, X'OY' se coupent suivant une droite indéfinie Δ ; mais si nous imaginons que l'on fasse tourner OX, autour de OZ dans le sens direct, la semi-droite OX, dans ce mouvement, rencontre d'abord une moitié de Δ, c'est cette semi-droite que nous considérons uniquement et que nous avons représentée suivant OX_1. L'angle ψ, dont il a fallu faire tourner OX pour l'amener sur OX_1, est un angle bien déterminé, compris entre 0 et π ; c'est le premier paramètre que nous voulions définir.

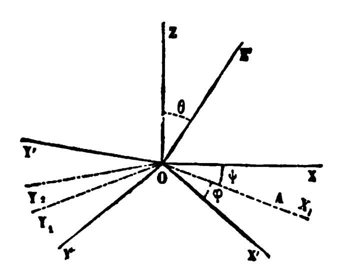


Fig. 6.

2° Faisons tourner la semi-droite OX, de 90° autour de OZ, dans le sens direct, et soit OY_1 sa nouvelle position. La droite OX_1 est perpendiculaire à OZ parce qu'elle est dans le plan YOX ; elle est aussi perpendiculaire à OZ' puisqu'elle

est située dans le plan $Y'OX'$; enfin elle est perpendiculaire sur OY_1, d'après la construction même de cette dernière droite. Cette observation étant faite, nous allons considérer le plan $(O.Z'ZY_1)$ et, dans ce plan, nous allons effectuer une rotation de la figure ZOY_1, dans le sens direct autour de OX, jusqu'à ce que la semi-droite OZ vienne coïncider avec la semi-droite OZ′. Nous exécutons ainsi une rotation dont nous désignerons l'amplitude par θ ; l'angle θ peut varier de 0 à 2π. Après cette rotation OY qui était perpendiculaire sur OZ vient occuper, dans le plan ZOZ′, une position OY_2 ; on doit remarquer que OY_2, droite perpendiculaire sur OZ′, est située dans le plan $X'OY'$, et qu'elle est perpendiculaire sur OX_1 droite normale au plan ZOZ′.

3° Enfin, faisons tourner le système Y_2OX_1 autour de OZ′ dans le sens direct, jusqu'à ce que OX_1 vienne coïncider avec OX′. Les deux angles Y_2OX_1, $Y'OX'$, sont droites; OY_2 vient donc, en même temps, se placer sur OY′. Nous désignerons pour φ, l'amplitude de cette dernière rotation; elle peut varier de 0 à 2π.

En résumé, on peut amener la superposition des deux systèmes (O.XYZ) (O.X′Y′Z′) par trois rotations successives dont le sens et l'amplitude viennent d'être définis. Dans chacune de ces transformations une des coordonnées reste fixe, et on passe de l'une à l'autre par les formules que nous avons établies dans la géométrie plane (§ 48).

Les systèmes que nous devons considérer sont :

$$1^{\circ}\ (O.XYZ),\quad 2^{\circ}\ (O.X_1Y_1Z),\quad 3^{\circ}\ (O.X_1Y_2Z'),\quad 4^{\circ}\ (O.X'Y'Z');$$

et l'on parvient du premier au dernier, en passant successivement par les deux systèmes intermédiaires.

Nous allons maintenant considérer un certain point M, et nous désignerons ses coordonnées, dans ces différents systèmes, respectivement, par :

$$1^{\circ}\ (x, y, z),\quad 2^{\circ}\ (x_1, y_1, z),\quad 3^{\circ}\ (x_1, y_2, z'),\quad 4^{\circ}\ (x', y', z').$$

Les formules rappelées donnent :

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta, \quad x_1 = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi; \quad z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta; \quad y_2 = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi.$$

On en déduit, d'abord,

$$y_1 = x' \sin\varphi \cos\theta + y' \cos\varphi \cos\theta - z' \sin\theta;$$

et, finalement,

$$\begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\cos\psi + \sin\psi\cos\varphi\cos\theta) + z'\sin\theta\sin\psi, \\ y = x'(\sin\psi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) - y'(\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) - z'\sin\theta\cos\psi, \\ z = x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

Telles sont les formules d'Euler qui permettent de passer, du système rectangulaire (O.XYZ) au système rectangulaire (O.X'Y'Z'), au moyen de trois paramètres indépendants φ, θ, ψ. Nous disons que ces paramètres sont *indépendants* parceque l'on reconnaît facilement, par des considérations de géométrie élémentaire, qu'il faut trois conditions indépendantes pour fixer la position du trièdre (O.X'Y'Z'), relativement au trièdre (O.XYZ).

24. Section plane d'une surface. La complication des formules d'Euler leur donne un intérêt plus théorique que pratique. Parmi les applications qu'elles comportent, on peut citer pourtant les recherches de l'équation de la courbe obtenue en coupant une surface par un plan.

Nous ferons d'abord remarquer tout l'intérêt qui s'attache à cette question. Supposons que l'on veuille couper une surface donnée U par un plan P de façon à obtenir une courbe Γ qui remplisse certaines conditions ; supposons, par exemple, qu'on demande que Γ soit un cercle, ou une hyperbole équilatère, ou une ellipse homothétique d'une ellipse donnée, etc... ; dans toutes ces questions, où *la propriété imposée à la section n'est pas projective*, on a généralement besoin de connaître l'équation de Γ, par rapport à deux axes pris dans le plan P.

Si, dans les formules d'Euler, nous faisons $z' = 0$ et si nous supposons que l'un prenne pour axes de la section OX_1 et OY_1, si, en d'autres termes, nous supposons $\varphi = 0$, ces formules donnent

$$(E') \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x' \cos \psi - y' \sin \psi \cos \theta, \\ y = x' \sin \psi + y' \cos \psi \cos \theta, \\ z = y' \sin \theta. \end{array} \right.$$

D'après cela, l'équation de la surface considérée étant

$$f(x, y, z) = 0,$$

celle de la section faite, dans cette surface, par un plan passant par l'origine des coordonnées, est

$$(1) \quad f(x' \cos \psi - y' \sin \psi \cos \theta, x' \sin \psi + y' \cos \psi \cos \theta, y' \sin \theta) = 0.$$

Dans cette égalité, x', y', désignent les coordonnées courantes d'un point de la section ; l'axe des x' est la trace du plan sécant sur le plan XOY ; les axes sont d'ailleurs rectangulaires et les paramètres ψ et θ ont la signification que nous leur avons donnée plus haut.

25. Etablissement direct des formules précédentes. Les formules d'Euler étant difficiles à retenir et leur démonstration exigeant un certain effort, nous voulons montrer comment on peut trouver directement les formules (E').

Les notations du paragraphe précédent étant conservées, considérons un point M, dans le plan Y'OX', et sa projection P, sur YOX ; PQ étant perpendiculaire sur OX', la droite MQ est, elle aussi, perpendiculaire sur OX'. L'angle MQP est donc égal à θ, et nous avons

$$MP = MQ \sin \theta, \text{ ou } z = y' \sin \theta.$$

Menons PR parallèlement à OY et considérons les deux contours brisés OQP, ORP, qui ont même résultante. Le théorème des projections donne

$$OR = OQ \cos \psi - PQ \sin \psi, \quad PR = OQ \sin \psi + PQ \cos \psi,$$

et comme

$$PQ = y' \cos \theta,$$

nous avons donc

$$x = x' \cos \psi - y' \sin \psi \cos \theta, \quad y = x' \sin \psi + y' \cos \psi \cos \theta.$$

Les formules (E') se trouvent ainsi établies par une méthode directe qui, en raison de sa simplicité, est celle que l'on doit suivre dans la recherche de l'équation d'une section plane.

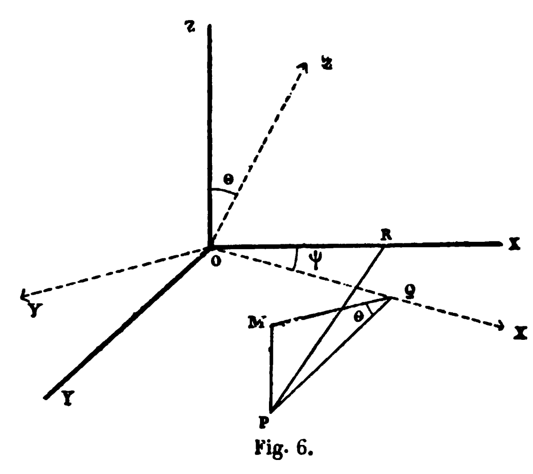


Fig. 6.

Ordinairement, le plan sécant est donné par son équation ; les paramètres ψ et θ ne sont donc pas connus immédiatement, mais nous montrerons, dans la leçon suivante, comment on les détermine.

26. Remarque. Parmi les applications de la formule précédente on peut citer la suivante :

Si $f(x, y, z)$ est du degré m, l'équation (1) du paragraphe 24 est, en général, du degré m en x' et y' ; dans tous les cas, elle n'est pas d'un degré supérieur à m. Ainsi *la section plane d'une surface d'ordre m est une courbe de l'ordre m, ou d'un degré inférieur.*

Nous établirons enfin, en terminant cette leçon, une propriété de la forme quadratique S,

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos \lambda + 2xz \cos \mu + 2xy \cos \nu,$$

propriété que nous utiliserons dans la suite.

27. Théorème. *Quand on passe du système x, y, z, (λ, μ, ν); au système* X, Y, Z, (λ', μ', ν') ; on a

$$S \equiv X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ \cos\lambda' + 2ZX \cos\mu' + 2XY \cos\nu'$$

Nous pouvons supposer d'abord que les deux systèmes proposés ont la même origine, puisque le transport des axes, parallèlement à eux-mêmes, n'affecte pas les termes du second degré.

Soit M le point dont les coordonnées sont représentées par x, y, z ; nous avons

$$\overline{OM}^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu.$$

Effectuons maintenant la transformation, par les formules connues, [(T″), § 19] nous obtenons

$$\overline{OM}^2 = \varphi(X, Y, Z).$$

Mais nous avons aussi

$$\overline{OM}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ \cos\lambda' + 2ZX \cos\mu' + 2XY \cos\nu',$$

et, par suite,

$$\varphi(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ \cos\lambda' + 2ZX \cos\mu' + 2XY \cos\nu'.$$

Cette relation ayant lieu, quels que soient X, Y, Z, on peut y remplacer le signe $=$; par le signe $\equiv$, et la proposition se trouve ainsi démontrée.

EXERCICES

1. *On considère le tableau suivant :*

A	B	C
A′	B′	C′
A″	B″	C″

dans lequel A, B, C; A′, B′, C′; A″, B″, C″; *désignent les cosinus des angles formés par trois droites rectangulaires avec trois axes également rectangulaires.*

Démontrer les propriétés suivantes :

1° *La somme des carrés des éléments d'une ligne verticale ou horizontale est égale à l'unité.*

2° *Le produit des éléments de deux lignes parallèles, multipliés deux à deux, est nul.*

3° *Le déterminant général est égal à* ± 1.

4° *Le quotient de chaque élément par le mineur correspondant est égal à* ± 1.

Dans les deux premières parties on suppose que les formules (α) et (β) sont connues, mais l'on propose de trouver, par un calcul direct, les formules (α') et (β').

Pour la troisième propriété, on peut appliquer la règle de la multiplication des déterminants (*Alg.*, note C, § 15) au produit

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix},$$

et l'on a

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} A^2+B^2+C^2, & AA'+BB'+CC' & AA''+BB''+CC'' \\ AA'+BB'+CC', & A'^2+B'^2+C'^2, & A'A''+B'B''+C'C'' \\ AA''+BB''+CC'', & A'A''+B'B''+C'C'' & A''^2+B''^2+C''^2 \end{vmatrix}$$

ou,

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

On démontre aussi cette propriété : soit par un calcul élémentaire, soit en appliquant une formule que nous donnons plus loin et qui donne le volume du tétraèdre en fonction des coordonnées des sommets.

2. *Déduire des formules d'Euler une infinité de solutions du problème suivant :*

Trouver un nombre entier dont le carré soit égal à une somme de trois carrés.

En désignant par A, B, C les cosinus des angles que fait OX′ avec les axes OX, OY, OZ, les formules d'Euler, comparées aux formules (R) (§ 21), donnent

$$A = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta,$$
$$B = \sin\psi\cos\varphi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta,$$
$$C = \sin\varphi\sin\theta.$$

Mais on peut poser

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \cos\psi = \frac{1-t'^2}{1+t'^2},\quad \cos\theta = \frac{1-t''^2}{1+t''^2};$$
$$\sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},\quad \sin\psi = \frac{2t'}{1+t'^2},\quad \sin\theta = \frac{2t''}{1+t''^2}.$$

La relation

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

donne donc l'identité

$$\begin{aligned}(1+t^2)^2(1+t'^2)^2(1+t''^2)^2 = &\left\{ (1-t^2)(1-t'^2)(1+t''^2) - 4tt'(1-t''^2)\right\}^2 \\ &+ \left\{ 2t'(1-t^2)(1+t''^2) + 2t(1-t'^2)(1-t''^2)\right\}^2 \\ &+ \left\{ 4tt''(1+t'^2)\right\}^2.\end{aligned}$$

Dans cette identité, t, t', t'' désignent des quantités arbitraires. En prenant pour ces quantités des nombres entiers, on obtiendra une infinité de solutions entières de l'équation indéterminée

$$U^2 + V^2 + W^2 = R^2,$$

en posant :

$$\begin{aligned}U &= (1-t^2)(1-t'^2)(1-t''^2) - 4tt'(1-t''^2),\\ V &= 2t'(1-t^2)(1+t''^2) + 2t(1-t'^2)(1-t''^2),\\ W &= 4tt''(1+t'^2);\end{aligned}$$

et,

$$R = (1+t^2)(1+t'^2)(1+t''^2).$$

3. *Démontrer que si un cylindre admet une section elliptique, hyperbolique ou parabolique, toute autre section faite dans cette surface par un plan non parallèle aux génératrices du cylindre est aussi une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.*

On prend d'abord l'axe OZ parallèle aux génératrices et le premier plan sécant pour plan XOY; puis, on effectue une transformation, le nouveau plan XO'Y étant le second plan sécant. Les formes P^2+Q^2, P^2-Q^2, P^2-Q se conservent et la proposition se trouve ainsi établie.

Pour ce motif nous appellerons *cylindre elliptique* celui qui admet une ellipse pour l'une de ses sections planes, et ainsi des autres.

On remarquera, en particulier, que si une courbe dans l'espace est une parabole, sa projection sur un plan quelconque est aussi une parabole.

Les propositions générales que nous venons d'établir pour les cylindres elliptique, hyperbolique et parabolique, résultent aussi de considérations géométriques très simples relatives aux points à l'infini.

4. *On considère deux cônes circulaires droits ayant des axes verticaux; démontrer que la projection de l'intersection de ces surfaces sur un plan perpendiculaire aux axes est un ovale de Descartes.*

On cherchera l'équation bipolaire de la projection.

TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇONS.

LA LIGNE DROITE ET LE PLAN

28. Équation d'un segment de droite. (*Premières formules.*) Nous établirons d'abord des formules, tout à fait semblables à celles qui nous ont servi dans la géométrie plane, et qui permettent de calculer, en fonction d'un paramètrie variable λ, les coordonnées d'un point M $(x, y, z,)$ mobile sur un segment de droite M_0M_1, M_0 (X_0, Y_0, Z_0), M_1 (x_1, y_1, z_1).

Projetons les trois points M_0, M_1, M, sur le plan XOY, et soient μ_0, μ_1, μ, ces projections.

En désignant par λ le rapport $\frac{MM_0}{MM_1}$, et en remarquant que

$$\frac{MM_0}{MM_1} = \frac{\mu\mu_0}{\mu\mu_1},$$

nous avons

$$(1) \quad \frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{y}{y_0 + \lambda y_1} = \frac{t}{t_0 + \lambda t_1}.$$

Dans ces égalités nous supposons

$$t_0 = t_1 = t = 1.$$

En projetant les points M, M_0, M_1 sur le plan XOZ, nous trouvons de même

$$(2) \quad \frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{z}{z_0 + \lambda z_1} = \frac{t}{t_0 + \lambda t_1}.$$

Les formules (1) et (2) donnent, par comparaison,

$$(F)\quad \frac{x}{x_0+\lambda x_1}=\frac{y}{y_0+\lambda y_1}=\frac{z}{z_0+\lambda z_1}=\frac{t}{t_0+\lambda t_1}.$$

En employant ces formules on doit se rappeler que μ désigne le rapport $\frac{MM_0}{MM_1}$, rapport qui est pris avec le signe $+$, ou le signe $-$, suivant que M est placé sur le segment M_0M_1, ou en dehors de ce segment.

On peut aussi, si l'on préfère la notation homogène, écrire les formules (F) sous la forme :

$$(F')\quad \frac{x}{ax_0+bx_1}=\frac{y}{ay_0+by_1}=\frac{z}{az_0+bz_1}=\frac{t}{at_0+bt_1}.$$

D'après cette notation, on a

$$\frac{MM_0}{MM_1}=\frac{b}{a}.$$

29. Théorème. *Lorsque les coordonnées d'un point mobile* M, *vérifient constamment une équation linéaire, le point* M *est toujours situé sur un plan* P *donné de position.*

Soit

$$Ax+By+Cz+Dt=0,$$

l'équation proposée; les coefficients A, B, C ne peuvent pas être nuls simultanément et nous supposerons $A \neq 0$. Une pareille égalité est vérifiée par une infinité de valeurs des variables; puisque après avoir donné à y et à z des valeurs arbitraires, on peut obtenir pour x une valeur bien déterminée.

Considérons donc trois solutions particulières

$$x_0, y_0, z_0, t_0;\quad x_1, y_1, z_1, t_1;\quad x_2, y_2, z_2, t_2;$$

et soient :

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,$$

les points correspondants

Par ces trois points on peut faire passer un plan P, bien déterminé, que nous allons considérer.

Imaginons une quatrième solution x', y', z', t'; et soit M' le point qui admet ces coordonnées; montrons que M' est situé dans le plan P.

En effet, nous avons par hypothèse

$$\begin{aligned} Ax' + By' + Cz' + Dt' &= 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + Dt_0 &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 &= 0; \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' & t' \\ x_0 & y_0 & z_0 & t_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

D'ailleurs, lorsqu'un déterminant est nul, on peut trouver des nombres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ qui ne sont pas tous nuls et qui vérifient les égalités

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha x' + \beta x_0 + \gamma x_1 + \delta x_2 &= 0, \\ \alpha y' + \beta y_0 + \gamma y_1 + \delta y_2 &= 0, \\ \alpha z' + \beta z_0 + \gamma z_1 + \delta z_2 &= 0, \\ \alpha t' + \beta t_0 + \gamma t_1 + \delta t_2 &= 0. \end{aligned}$$

L'un, au moins, des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ est différent de zéro; supposons que ce soit α et remarquons que nous ne pouvons pas avoir.

$$\alpha \neq 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0;$$

car, dans cette hypothèse, on aurait $\alpha t' = 0$; ce qui est impossible, puisque $t' = 1$. Nous pouvons donc supposer $\alpha \neq 0$, et $\beta \neq 0$.

Cette remarque étant faite, prenons sur $M'M_1$ un point μ (X, Y, Z, T), tel que l'on ait

$$(2) \quad \frac{X}{\alpha x' + \gamma x_1} = \frac{Y}{\alpha y' + \gamma y_1} = \frac{Z}{\alpha z' + \gamma z_1} = \frac{T}{\alpha t' + \gamma t_1};$$

et sur M_0M_2 un point ν (ξ, η, ζ, ν), dont les coordonnées sont calculées par les formules :

$$(3) \quad \frac{\xi}{\beta x_0 + \delta x_2} = \frac{\eta}{\beta y_0 + \delta y_2} = \frac{\zeta}{\beta z_0 + \delta z_2} = \frac{\tau}{\beta t_0 + \delta t_2}.$$

Les formules (1), (2), et (3), donnent, par comparaison,

$$\frac{X}{\xi} = \frac{Y}{\eta} = \frac{Z}{\zeta} = \frac{T}{\tau};$$

ou, puisque $T = \tau = 1$,

$$X = \xi, \quad Y = \eta, \quad Z = \zeta.$$

Ainsi les deux points considérés μ et ν se confondent, et cette remarque prouve que $M'M_1$ rencontre M_0M_2 ; en d'autres termes, les quatre points $M'M_0$, M_1, M_2, sont situés dans le même plan.

30. Théorème. *Lorsqu'un point est mobile dans un plan fixe* P, *ses coordonnées vérifient constamment une certaine équation linéaire.*

Prenons, dans le plan P, trois points fixes M_0, M_1, M_2 et soit M' un point quelconque de ce plan. Les droites M_0M_2, $M'M_1$ se coupent en un point μ dont nous désignerons les coordonnées par X, Y, Z, T. Ce point μ étant situé sur la droite M_0M_2, nous avons

$$(1) \quad \frac{X}{lx_0 + hx_2} = \frac{Y}{ly_0 + hy_2} = \frac{Z}{lz_0 + hz_2} = \frac{T}{lt_0 + ht_2}.$$

D'autre part, ce même point μ appartenant au segment MM', nous avons aussi

$$(2) \quad \frac{X}{px' + kx_1} = \frac{Y}{py' + ky_1} = \frac{Z}{pz' + kz_1} = \frac{T}{pt' + kt_1}.$$

Les égalités (1) et (2) donnent, par comparaison,

$$\frac{px' + kx_1}{lx_0 + hx_2} = \frac{py' + ky_1}{ly_0 + hy_2} = \frac{pz' + kz_1}{lz_0 + hz_2} = \frac{pt' + kt_1}{lt_0 + ht_2}.$$

En désignant par m la valeur commune de ces rapports, nous avons donc :

$$\begin{aligned} px' - lmx_0 + kx_1 - mhx_2 &= 0, \\ py' - lmy_0 + ky_1 - mhy_2 &= 0, \\ pz' - lmz_0 + kz_1 - mhz_2 &= 0, \\ pt' - lmt_0 + kt_1 - mht_2 &= 0; \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{vmatrix} x' & x_0 & x_1 & x_2 \\ y' & y_0 & y_1 & y_2 \\ z' & z_0 & z_1 & z_2 \\ t' & t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, en considérant l'équation linéaire

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{vmatrix} x & x_0 & x_1 & x_2 \\ y & y_0 & y_1 & y_2 \\ z & z_0 & z_1 & z_2 \\ t & t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} = 0,$$

on peut dire que les coordonnées d'un point quelconque du plan $M_0M_1M_2$ vérifient cette relation.

31. Ordre d'une courbe gauche. Supposons qu'une courbe Γ, située dans l'espace, corresponde aux équations

$$(1) \qquad f_p(x,y,z) = 0, \qquad f_q(x,y,z) = 0,$$

la première étant du degré p, et l'autre du degré q. Si l'on cherche l'intersection de Γ avec un plan quelconque P ayant pour équation

$$(2) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

le nombre des solutions communes aux équations (1) est un nombre μ, égal ou inférieur à pq. C'est ce nombre que nous avons appelé l'ordre de la courbe (§ 8).

Projetons Γ sur un plan Q parallèlement à une droite Δ ; nous obtenons une courbe γ dont le degré est égal, ou inférieur, à μ.

En effet soit Δ' une droite prise dans le plan Q et coupant γ aux points $a_1, a_2, \ldots a_{\mu'}$. Si nous menons par ces points des parallèles à Δ, nous obtenons sur Γ des points correspondants $A_1, A_2, \ldots A_{\mu'}$, et l'on peut considérer ceux-ci comme représentant les points communs à Γ et à un plan mené par Δ', parallèlement à Δ. Le nombre μ' est donc, en général, égal à μ ; dans tous les cas il ne peut pas être supérieur à μ; et, à fortiori, supérieur à pq. Comme μ est généralement égal à pq, on voit que l'ordre d'une courbe est représenté, exception faite de certains cas particuliers, par le produit des degrés des équations qui lui correspondent ; ce nombre est aussi, du moins en général, le degré de la projection de la courbe, sur un plan.

32. Équation du plan passant par trois points. La formule (P) que nous venons de trouver représente, d'après le raisonnement même que nous avons fait pour y arriver, l'équation du plan qui passe par les trois points M_0, M_1, M_2.

33. Différentes formes de l'équation du plan. D'après ce que nous venons de voir (§ 29), l'équation la plus générale d'un plan est

$$(P_1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Nous le désignerons aussi, dans la notation abrégée, par

$$(P_2) \qquad P = 0,$$

On emploie encore, pour l'équation du plan, deux autres formes que nous allons faire connaître.

Lorsque les paramètres A, B, C, sont différents de zéro, l'équation (P_1) peut s'écrire

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1,$$

et, en posant

$$p = -\frac{D}{A}, \quad q = -\frac{D}{B}, \quad r = -\frac{D}{C},$$

on a, pour l'équation du plan la forme

$$(P_3) \quad \frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$$

Enfin, considérons un plan et abaissons de l'origine O une perpendiculaire OP, sur ce plan. Prenons dans le plan donné un point quelconque M et construisons la ligne brisée OABM formée par les coordonnées de M.

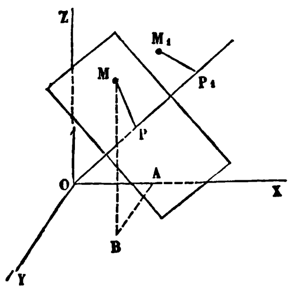


Fig. 7.

En posant :

$$OP=h, \quad POX=\alpha, \quad POY=\beta, \quad POZ=\gamma,$$

et en projetant, sur OP, le contour brisé PMBAO, nous avons

$$(P_4) \qquad x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=h$$

C'est une quatrième forme de l'équation du plan.

34. Plans parallèles. Pour que deux plans soient parallèles, il est nécessaire que les traces de ces plans sur deux plans sécants soient parallèles. D'ailleurs, cette condition est suffisante.

Les équations des plans considérés étant

$$Ax+By+Cz+D=0,$$
$$A'x+B'y+C'z+D'=0;$$

les traces de ces plans sur le plan XOY correspondent aux équations

$$Ax+By+D=0,$$
$$A'x+B'y+D'=0;$$

on a donc

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

On trouve, de même,

$$\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}.$$

En résumé, les conditions cherchées sont :

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

35. Remarque. Dans la notation abrégée, si l'on désigne par $P = o$, l'équation d'un plan, l'équation générale des plans parallèles est

$$P = \lambda,$$

λ désignant un paramètre variable.

Lorsque dans l'équation (P_1) on suppose que A, B, C, sont des paramètres fixes, mais que D est, au contraire, un coefficient variable, tous les plans qui correspondent à ces équations sont parallèles. La connaissance des coefficients A, B, C, fixe donc la direction du plan, et, pour ce motif, on peut les nommer les *paramètres directeurs du plan*. Le résultat trouvé au paragraphe précédent peut, en acceptant ce langage, s'énoncer en disant : *lorsque deux plans sont parallèles, les paramètres directeurs ont des valeurs proportionnelles.*

36. Plan passant par un point fixe. Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point fixe proposé; l'équation du plan cherché étant

$$Ax + By + Cz + D = o,$$

on a

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = o,$$

et, par suite,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = o.$$

Dans cette équation, les paramètres directeurs sont arbitraires.

37. Plan passant par deux points fixes. Si dans l'équation (P), trouvée plus haut (§ 28), on donne à x_2, y_2, z_2, des valeurs arbitraires, le plan qui correspond à cette équation passe toujours par les points M_0, M_1. Ainsi, α, β, γ, désignant des paramètres arbitraires, le plan qui a pour équation :

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

passe par la droite $M_0 M_1$. Il se présente ici, comme dans d'autres questions analogues, un fait qui mérite d'être remarqué.

L'équation générale d'un plan P passant par deux points M_0, M_1, ne doit renfermer qu'*un paramètre arbitraire*, puisque, en faisant passer P par un troisième point M_2, l'équation de ce plan doit être bien déterminée. Les paramètres variables α, β, γ, sont donc *surabondants;* ils ne peuvent pas, comme on le vérifie sans peine, servir à faire exprimer à l'équation (1) deux ou, *à fortiori,* trois conditions indépendantes.

On peut, d'après cette observation, prendre l'équation

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \lambda & \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pour représenter (λ étant variable) tous les plans qui passent par la droite $M_0 M_1$.

38. Équations de la ligne droite. Une droite peut toujours être considérée comme étant l'intersection de deux plans.

Si l'on suppose qu'un point M soit mobile sur une droite Δ, intersection des plans P et Q, on peut donc dire que les

coordonnées de M vérifient constamment deux équations linéaires. Nous représenterons, d'après cela, par

$$(\Delta) \quad \begin{cases} P = Ax + By + Cz + D = 0, \\ Q = A'x + B'y + C'z + D' = 0, \end{cases}$$

les équations d'une droite.

39. Forme réduite des équations d'une droite. Si nous supposons $AB' - BA' \neq 0$, les équations précédentes étant résolues par rapport à x et à y, peuvent s'écrire sous la forme :

$$(R) \quad \begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q. \end{cases}$$

Ces équations sont souvent employées, à cause de leur simplicité, mais il convient d'observer qu'elles ne représentent pas l'*équation générale des droites de l'espace*, puisque nous avons supposé que la quantité $AB' - BA'$ n'était pas nulle.

En cherchant les traces des plans P et Q sur le plan XOY la condition

$$AB' - BA' \neq 0,$$

reçoit une interprétation géométrique; on voit ainsi que la droite Δ n'est pas, dans cette hypothèse, parallèle à XOY. Concluons donc que les équations réduites (R) représentent toutes les droites de l'espace, *excepté celles qui sont parallèles au plan* XOY.

40. Équation d'un segment de droite. (*Secondes formules.*) Prenons sur une droite Δ un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0), et adoptons pour *la direction positive de* Δ *celle de la semi-droite située dans la région de l'espace qui, relativement au plan* XOY, *renferme la semi-droite* OZ.

Si Δ est parallèle au plan XOY, sa projection sur ce plan est une droite Δ', qui, conformément à la convention faite dans la géométrie plane, a une direction positive que nous adopterons pour représenter celle de Δ.

Menons par l'origine une semi-droite OP parallèle à la direction positive de Δ et prenons sur cette parallèle, à partir du point O, une longueur $OP = 1$. Nous désignerons par α, β, γ, les coordonnées de P et nous dirons qu'ils représentent les *paramètres directeurs de la droite* Δ.

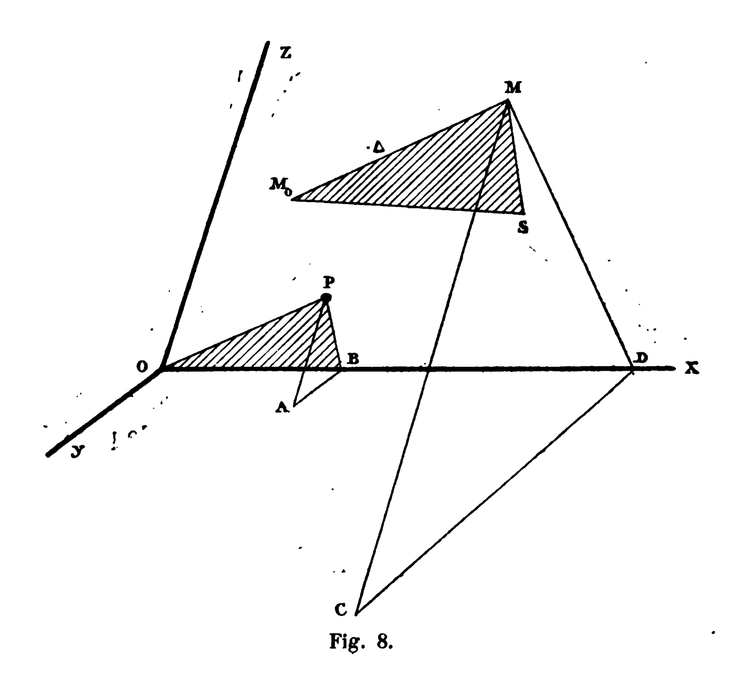


Fig. 8.

Ceci posé, ayant construit, comme l'indique la figure, les coordonnées des points M et P, si nous traçons, par le point M_0, une parallèle à OX, jusqu'à sa rencontre avec le plan MCD, les droites MS et PB peuvent être considérées comme étant les intersections de deux plans parallèles PAB, MCD, par deux autres plans également parallèles POB, M_0MS. Ainsi, les droites PB, MS, sont parallèles et les triangles semblables OPB, M_0MS, donnent

$$\frac{M_0S}{OB} = \frac{M_0M}{OP}$$

ou

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{\rho}{1},$$

ρ désignant la distance M_0M *en grandeur et en signe ;* elle est comptée positivement lorsque le mobile qui va de l'origine M_0 au point considéré M, parcourt ce segment dans le sens de la direction positive ; elle est prise négativement, dans le cas contraire.

Ainsi les coordonnées (x, y, z) du point M sont données par les formules

$$(\mathrm{F}') \quad x = x_0 + \alpha\rho, \quad y = y_0 + \beta\rho, \quad z = z_0 + \gamma\rho.$$

Ces relations prouvent que l'on peut représenter les équations d'une droite par les formules suivantes

$$(\mathrm{R}') \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}.$$

Ces formules sont analogues à celles qui ont été établies plus haut (§ 39), mais elles offrent l'avantage de représenter, avec une notation plus symétrique, les équations de toutes les droites de l'espace.

Nous rappelons que les paramètres α, β, γ, ne sont pas indépendants et qu'ils doivent vérifier la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cos \lambda + 2\gamma\alpha \cos \mu + 2\alpha\beta \cos \nu = 0.$$

41. Rencontre de deux droites. Deux droites Δ, Δ', dans l'espace, n'ont en général aucun point commun ; les coordonnées d'un point pris sur une droite devant vérifier deux équations, l'analyse prouve l'impossibilité que nous signalons ici, par ce fait algébrique, savoir : que quatre équations à trois inconnues n'ont, en général, aucune solution commune.

On peut donc chercher la condition que doivent vérifier les coefficients des équations de deux droites pour que celles-ci aient un point commun.

Si l'on prend les équations de Δ et de Δ' sous la forme générale :

$$(\Delta)\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0; \end{cases} \quad (\Delta')\begin{cases} Mx + Ny + Pz + Q = 0, \\ M'x + N'y + P'z + Q' = 0; \end{cases}$$

la condition cherchée est

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ M & N & P & Q \\ M' & N' & P' & Q' \end{vmatrix} = 0.$$

En partant des équations réduites :

$$(\Delta)\begin{cases} x = az + p, \\ y = bz + q; \end{cases} \quad (\Delta')\begin{cases} x = a'z + p', \\ y = b'z + q'; \end{cases}$$

on trouve

$$(a - a')(q - q') = (b - b')(p - p').$$

Enfin si l'on considère les équations :

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

$$(\Delta') \quad \frac{x - x_1}{\alpha'} = \frac{y - y_1}{\beta'} = \frac{z - z_1}{\gamma'} = \rho';$$

on en déduit

$$x_0 - x_1 + \alpha\rho - \alpha'\rho' = 0,$$
$$y_0 - y_1 + \beta\rho - \beta'\rho' = 0,$$
$$z_0 - z_1 + \gamma\rho - \gamma'\rho' = 0;$$

et, par suite,

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & \alpha & \alpha' \\ y_0 - y_1 & \beta & \beta' \\ z_0 - z_1 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

42. Parallélisme de deux droites. Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur deux plans

sécants sont des droites parallèles. Cette condition est nécessaire et suffisante.

Lorsqu'on prend les équations de deux droites sous la forme réduite, les conditions de parallélisme sont donc

$$a = a', \quad b = b'.$$

C'est pour exprimer que la direction d'une droite est bien déterminée quand on connaît les paramètres a et b, qu'on les a nommés *coefficients angulaires* de la droite.

Lorsque les équations des droites ne sont pas données sous la forme réduite, on cherchera leurs projections sur deux plans de coordonnées et on exprimera que ces projections sont, deux à deux, parallèles.

43. Parallélisme d'une droite et d'un plan. Lorsqu'on veut exprimer que la droite Δ qui correspond aux équations

$$(\Delta) \quad \begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \end{cases}$$

est parallèle à un plan P dont l'équation est

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

il suffit de vérifier que le point commun est rejeté à l'infini. On a donc la condition suivante

$$(1) \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} = 0.$$

Si tous les déterminants du troisième ordre du tableau rectangulaire

$$(1) \quad \left\| \begin{matrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{matrix} \right\|$$

sont nuls, ou seulement l'un de ceux qui renferment la quatrième colonne, on sait (*Alg.*, § 102) que les équations proposées admettent une infinité de solutions communes. En se plaçant au point de vue géométrique, on peut dire

que Δ est une droite du plan P. Ainsi, lorsque l'égalité (1) est vérifiée ; si, de plus, un autre déterminant du troisième ordre du tableau (2) est nul, la droite considérée est située dans le plan donné.

Lorsqu'on prend les équations réduites on trouve, pour la condition cherchée,

$$Aa + Bb + C = 0.$$

Enfin, la droite est toute entière renfermée dans le plan, si l'on a, aussi,

$$Ap + Bq + D = 0.$$

44. Intersection de trois plans. Cette question n'est, au fond, que celle qui se propose la résolution et la discussion des équations

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0. \end{aligned}$$

Ce problème a été traité en algèbre, d'une façon complète et générale. Le lecteur rapprochera, sans peine, les résultats algébriques connus et la figure géométrique correspondante formée par les trois plans.

45. Équations générales. Nous signalerons maintenant quelques équations générales souvent usitées.

1° *Plan passant par une droite* Δ. Les équations de la droite Δ étant

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

l'équation générale des plans passant par Δ est

$$\alpha P + \beta Q = 0.$$

2° *Plan parallèle à une droite.* En conservant les notations précédentes, l'équation générale des plans parallèles à Δ est

$$\alpha P + \beta Q + \gamma = 0.$$

3° *Droite passant par un point.* En désignant par x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point donné M_0, les équations d'une droite passant par M_0, sont,

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

On déduit de ce résultat que les équations d'une droite passant par deux points $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, sont

$$\frac{x-x_0}{x_0-x_1}=\frac{y-y_0}{y_0-y_1}=\frac{z-z_0}{z_0-z_1}.$$

En désignant par t la valeur commune de ces rapports on a

$$x=(1+t)x_0-tx_1,\quad y=(1+t)y_0-ty_1,\quad z=(1+t)z_0-tz_1$$

Ces formules sont analogues aux formules (F), mais elles sont moins commodes.

Dans les résultats précédents, qui exigent quelques explications trop faciles pour que nous croyions devoir y insister, (α, β, γ) désignent, bien entendu, des paramètres arbitraires.

46. Théorème. *Lorsque les faces d'un tétraèdre ont pour équation, respectivement,*

$$R=0,\quad S=0,\quad U=0,\quad V=0,$$

tout plan de l'espace peut être représenté par l'égalité

$$\alpha R+\beta S+\gamma U+\delta V=0.$$

La démonstration de cette propriété, et celle du théorème énoncé au paragraphe suivant, sont tout à fait semblables à celles que nous avons données, pour établir les équations analogues, dans la géométrie plane (§ 72 et 73).

47. Théorème. *Toute surface de l'ordre m peut être représentée par l'équation*

$$f(R, S, U, V)=0,$$

f désignant une forme entière et homogène du degré m.

48. Remarque. On peut interpréter géométriquement le résultat précédent en observant que les distances ξ, η, ζ, τ, d'un point M de l'espace aux quatre faces du tétraèdre considéré sont, à une constante près, respectivement égales à R, S, U, et V. Ces nombres ξ, η, ζ, τ, sont appelés *coordonnées tétraédiques* du point M, et le tétraèdre correspondant est dit le *tétraèdre de référence*.

Il résulte de ce qui précède que l'équation générale des surfaces de l'ordre m, dans le système tétraédrique, est

$$f(\xi, \eta, \zeta, \tau) = 0,$$

f désignant une forme entière, et homogène, du degré m.

49. Centre des distances proportionnelles. Imaginons, dans l'espace, p points A_0, A_1, ... A_{p-1} ; et supposons qu'à chacun d'eux corresponde un nombre, ou coefficient particulier ; soient α_0, α_1, ... α_{p-1}, ces coefficients.

Sur A_1A_0 nous pouvons toujours trouver un point P_1, tel que l'on ait

$$\frac{P_1A_0}{P_1A_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}.$$

Prenons maintenant sur P_1A_2 un point P_2, dont les distances aux points P_1 et A_2 vérifient la proportion

$$\frac{P_2P_1}{P_2A_3} = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1};$$

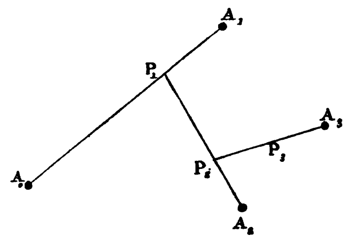


Fig. 9.

et ainsi de suite. Après $(p - 1)$ constructions de ce genre,

nous trouverons un point P_{p-1} que nous appellerons le *centre des distances proportionnelles*. Nous nous proposons de calculer ses coordonnées.

Nous adopterons, à cet effet, les notations suivantes :

$$A_0(x_0\, y_0\, z_0),\quad P_1(X_1\, Y_1\, Z_1)$$
$$A_1(x_1\, y_1\, z_1),\quad P_2(X_2\, Y_2\, Z_2)$$
$$\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{p-1}(x_{p-1}\, y_{p-1}\, z_{p-1}),\quad P_{p-1}(X_{p-1}\, Y_{p-1}\, Z_{p-1}).$$

Les formules (F') (§ 27), donnent

$$\frac{X_1}{\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1} = \frac{Y_1}{\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1} = \frac{Z_1}{\alpha_0 z_0 + \alpha_1 z_1} = \frac{T_1}{\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1} = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1}$$

Ces mêmes formules donnent encore

$$\frac{X_2}{(\alpha_0+\alpha_1)X_1+\alpha_2 x_2} = \frac{Y_2}{(\alpha_0+\alpha_1)Y_1+\alpha_2 z_2} = \frac{Z_2}{(\alpha_0+\alpha_1)Z_1+\alpha_2 z_2} = \frac{1}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}$$

ou, en tenant compte des égalités précédentes,

$$\frac{X_2}{\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2} = \frac{Y_2}{\alpha_0 y_0+\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2} = \frac{Z_2}{\alpha_0 z_0+\alpha_1 z_1+\alpha_2 z_2} = \frac{1}{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2}$$

En poursuivant ces calculs on trouve, finalement,

$$X_{p-1} = \frac{\Sigma\,\alpha_k x_k}{\Sigma\,\alpha_k},\quad Y_{p-1} = \frac{\Sigma\,\alpha_k y_k}{\Sigma\,\alpha_k},\quad Z_{p-1} = \frac{\Sigma\,\alpha_k z_k}{\Sigma\,\alpha_k}$$ [1]

Dans ces formules k doit prendre toutes les valeurs : $0, 1, \ldots (p-1)$; d'ailleurs les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{p-1}$ sont quelconques, positifs ou négatifs.

1. Ces formules s'appliquent à la géométrie plane, en supposant

$$z_0 = z_1 = z_2 \ldots = z_{p-1} = 0;$$

c'est pour éviter la répétition des mêmes calculs que nous avons placé ici cette question.

50. Centre des moyennes distances. Dans le cas particulier où les coefficients α sont tous égaux, le point que nous avons défini au paragraphe précédent prend le nom de *centre des moyennes distances*. Les coordonnées $\xi_{p-1}, \eta_{p-1}, \zeta_{p-1}$, de ce point se calculent par les formules

$$\xi_{p-1} = \frac{\Sigma x_k}{p}, \quad \eta_{p-1} = \frac{\Sigma y_k}{p}, \quad \zeta_{p-1} = \frac{\Sigma z_k}{p}$$

EXERCICES

---

1. *Les axes étant obliques, démontrer que l'angle V formé par les droites Δ, Δ' qui correspondent, respectivement aux équations :*

$$(\Delta) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} + \frac{z}{\gamma}, \quad (\Delta') \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{6'} = \frac{z}{\gamma'};$$

est donné par la formule

$$\cos V = \frac{\Sigma \alpha\alpha' + \Sigma \left[(6\gamma' + \gamma 6') \cos \lambda\right]}{\sqrt{UU'}};$$

en posant :

$$U = \alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 + 26\gamma \cos\lambda + 2\gamma\alpha \cos\mu + 2\alpha 6 \cos\nu,$$
$$U' = \alpha'^2 + 6'^2 + \gamma'^2 + 26'\gamma' \cos\lambda + 2\gamma'\alpha \cos\mu + 2\alpha' 6' \cos\nu.$$

On peut établir ce résultat très simplement en observant qu'en prenant sur Δ le point A $(\alpha, 6, \gamma)$, et sur Δ' le point A' $(\alpha', 6', \gamma')$, on a

$$\overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2 - 2OA\,OA' \cos\nu.$$

Les longueurs AA', OA, OA', s'expriment d'ailleurs par des formules connues.

2. *Établir la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.*

Soit ABC le triangle sphérique proposé, et soit O le centre de la sphère sur laquelle il est placé. Prenons OC pour axe Oz, O pour origine, et AOC pour plan ZOX ; les axes étant d'ailleurs rectangulaires.

Les coordonnées de A, sont :

$$\sin b,\ o,\ \cos b;$$

et celles de B

$$\sin a \cos C,\ \sin a \sin C,\ \cos a.$$

On a donc,

$$\text{Cos AOB} = \cos C = \sin a \sin b \cos C + \cos a \cos b.$$

3. *Démontrer que l'angle de deux droites dont les cosinus directeurs sont α, β, γ; α', β', γ'; peut se calculer par les formules :*

$$\sin^2 V = (\beta\gamma' - \gamma\beta')^2 + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \beta\alpha')^2,$$

$$4 \sin^2 \frac{V}{2} = (\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2 + (\gamma - \gamma')^2,$$

$$4 \cos^2 \frac{V}{2} = (\alpha + \alpha')^2 + (\beta + \beta')^2 + (\gamma + \gamma')^2 .$$

4. *Si α, β, γ désignent les angles qu'une direction donnée Δ fait avec les axes obliques, on a :*

$$\begin{vmatrix} & \Delta_0 & & \begin{matrix}\cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma\end{matrix} \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En projetant le contour des coordonnées d'un point de Δ, et la résultante l, sur les trois axes et sur Δ, on a :

$$\begin{aligned} x + y\cos\nu + z\cos\mu &= l\cos\alpha, \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda &= l\cos\beta \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z &= l\cos\gamma, \\ x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma &= l \end{aligned}$$

Ces relations donnent la formule annoncée. On peut remarquer qu'en les multipliant, respectivement, par x, y, z on retrouve la formule qui donne l^2.

5. *Démontrer que, en coordonnées obliques, la formule qui donne l'angle de deux droites* Δ, Δ', *est* :

$$\left|\begin{array}{ccc:c} & \Delta_0 & & \cos\alpha \\ & & & \cos\beta \\ & & & \cos\gamma \\ \hdashline \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' & 0 \end{array}\right| \mp \Delta_0 \cos V = 0.$$

En projetant le contour xyz sur la seconde droite Δ, on a :

$$x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' = l\cos V;$$

et on obtient alors un déterminant dont la quatrième colonne a des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$\cos\alpha + 0, \quad \cos\beta + 0, \quad \cos\gamma + 0, \quad 0 + \cos V.$$

6. *Déterminer l'intersection des surfaces qui correspondent à l'une ou à l'autre des équations suivantes :*

$$(1) \qquad x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1,$$

$$(2) \qquad xyz + (x+y)(x+z)(y+z) = 1,$$

par le plan qui a pour équation,

$$x + y + z = 0.$$

CINQUIÈME LEÇON

DROITES ET PLANS PERPENDICULAIRES [1]

51. Droite perpendiculaire à un plan. On sait que la condition nécessaire et suffisante, pour qu'une droite Δ soit perpendiculaire à un plan P, est que les projections de Δ sur deux plans sécants soient perpendiculaires aux traces de P, sur ces mêmes plans.

Soient

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \end{array} \right.$$

les équations de Δ, et soit

$$(P) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

celle du plan P. La projection de Δ sur XOY a pour équation

$$(1) \quad (A'C'' - C'A'')\,x + (B'C'' - C'B'')\,y + D'C'' - C'D'' = 0,$$

et l'équation

$$(2) \quad Ax + By + D = 0,$$

représente la trace de P sur ce même plan XOY. Les droites (1) et (2) étant rectangulaires, on a

$$\frac{A}{B'C'' - C'B''} = \frac{B}{C'A'' - A'C''}.$$

1. Dans cette leçon, et dans la suite, il sera sous-entendu que les axes de coordonnées sont *rectangulaires*. Quand il nous arrivera de nous écarter de cette convention, nous préviendrons de cette exception.

En appliquant ce raisonnement au plan YOZ, on trouve

$$\frac{B}{C'A'' - A'C''} = \frac{C}{A'B'' - B'A''}.$$

En résumé, les conditions cherchées sont

$$\text{(A)} \quad \frac{A}{B'C'' - C'B''} = \frac{B}{C'A'' - A'C''} = \frac{C}{A'B'' - B'A''}.$$

52. Remarque. Lorsque l'on prend les équations de la droite sous la forme réduite (R), les conditions précédentes deviennent

$$\text{(B)} \quad \frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{1}.$$

53. Problème. *Abaisser d'un point* M_0 *une perpendiculaire sur un plan* P.

Les coordonnées de M_0 étant x_0, y_0, z_0, les équations générales d'une droite Δ passant par ce point sont

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

et Δ sera perpendiculaire au plan P qui a pour équation

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

si l'on a

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}.$$

Les équations de la normale abaissée de M_0 sur P sont donc

$$\text{(C)} \quad \frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

54. Problème. *Abaisser d'un point* M_1 (x_1, y_1, z_1) *un plan* P, *perpendiculaire sur une droite* Δ.

Soient (§ 38)

$$(\Delta)\quad \frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}\ [1]$$

les équations de Δ. Le plan P est représenté par l'équation

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0,$$

avec les conditions

$$\frac{A}{\alpha}=\frac{B}{\beta}=\frac{C}{\gamma}.$$

L'équation cherchée est donc, finalement,

$$(1)\quad \alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)=0.$$

Lorsque la droite Δ est donnée par les équations générales

$$A'x+B'y+C'z+D'=0,$$
$$A''x+B''y+C''z+D''=0;$$

on a

$$\frac{\alpha}{B'C''-C'B''}=\frac{\beta}{C'A''-A'C''}=\frac{\gamma}{A'B''-B'A''};$$

et l'équation (1) prend la forme

$$\text{D)}\quad (B'C''-C'B'')(x-x_1)+(C'A''-A'C'')(y-y_1)+(A'B''-B'A'')(z-z_1)=0.$$

55. Angles d'une droite avec les axes. Considérons une droite Δ passant par l'origine et dont les équations sont

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}.$$

1. On doit remarquer que cette forme réduite donnée aux équations d'une droite, renferme, comme cas particulier, l'autre forme réduite ; il suffit de supposer

$$x_0=p,\quad y_0=q,\quad z_0=0;$$

et,

$$\alpha=a,\quad \beta=b,\quad \gamma=1.$$

Soient λ, μ, ν les angles que fait la direction positive de Δ avec les axes OX, OY, OZ ; nous avons

$$(1) \quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Considérons le point directeur de Δ. Les coordonnées de ce point sont $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, et nous avons

$$(2) \quad \frac{\cos\lambda}{\alpha} = \frac{\cos\mu}{\beta} = \frac{\cos\nu}{\gamma}.$$

Les formules (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$(E) \quad \cos\lambda = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \quad \cos\mu = \pm\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}, \quad \cos\nu = \pm\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}.$$

Dans ces formules, les signes supérieurs et inférieurs se correspondent ; on prendra le signe +, si γ est positif ; le signe —, dans le cas contraire.

56. Perpendicularité de deux droites. Si l'on représente les droites proposées Δ, Δ', par les équations

$$(\Delta) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \qquad (\Delta') \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'};$$

les directions positives de ces droites font, avec les axes de coordonnées, des angles λ, μ, ν ; λ', μ', ν' ; et l'on a (§ 16)

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0.$$

Les formules du paragraphe précédent donnent la relation cherchée :

$$(F) \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Lorsque les équations des droites considérées sont données sous la forme réduite (R) la relation précédente s'écrit :

$$(G) \quad aa' + bb' + 1 = 0.$$

57. Angles d'un plan P, avec les plans de coordonnées. On peut supposer que le plan considéré passe par l'origine; soit

$$Ax + By + Cz = 0,$$

son équation. La normale au plan P, menée par l'origine, a pour équation.

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

En appelant λ', μ', ν', les angles cherchés, les formules établies au paragraphe précédent donnent

$$\cos\lambda' = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\mu' = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\nu' = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Nous rappelons que, dans les égalités, les signes supérieurs et inférieurs se correspondent.

58. Définition du semi-plan positif ou négatif. Si l'on veut préciser les angles λ', μ', ν', il est nécessaire d'introduire ici la notion des *semi-plans*; comme nous avons introduit, en géométrie plane, dans une situation analogue, l'idée des semi-droites.

Lorsqu'un plan indéfini P coupe le plan XOY suivant une droite Δ, celle-ci partage P en deux régions auxquelles nous donnerons le nom de semi-plan.

L'une de ces régions P′ est située dans la même partie de l'espace que OZ, par rapport au plan XOY; nous l'appellerons le *semi-plan positif*; l'autre région P″, constitue le *semi-plan négatif*.

Cette convention étant faite, le semi-plan P′ fait avec le semi-plan formé par la partie positive indéfinie de YOX et limitée à Δ, un angle dièdre *bien déterminé*, dont le cosinus a l'une ou l'autre des valeurs suivantes :

$$\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

On peut alors se poser ici cette question : quelle est, parmi ces deux quantités, celle qui convient à l'angle bien déterminé que nous venons de définir?

Pour mieux préciser, prenons un exemple numérique et considérons le plan P qui a pour équation

$$x + 2y + 2z = 1 ;$$

l'axe de ce plan correspond aux équations

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2},$$

et la semi-normale positive fait avec OZ un angle bien déterminé, angle aigu dont le cosinus est égal à $\frac{2}{3}$; mais le semi-plan positif P' fait avec le semi-plan positif YY'X, un angle obtus dont le cosinus est égal à $-\frac{2}{3}$.

D'une façon générale on peut dire que le coefficient de z dans l'équation d'un plan P étant supposé positif, les nombres A, B, C, coefficients des termes en x, y, et z dans cette équation, représentent les coordonnées d'un point M qui peut servir à déterminer la direction positive de l'axe du plan, laquelle est celle du mobile allant de l'origine au point M. Si M, point bien déterminé, d'après ce que nous venons de dire, se projette sur le semi-plan positif YY'X, l'angle dièdre formé par le semi-plan positif P avec YY'X est un angle obtus dont le cosinus est égal à

$$\frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \quad (C > 0)$$

Au contraire, si la projection de M se fait sur le semi-plan négatif YY'X', l'angle dièdre considéré est aigu et son cosinus est représenté par

$$+\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} ; \quad (C > 0)$$

59. Remarque. Nous ferons observer ici comment on peut calculer les paramètres ψ et θ dont nous avons parlé précédemment (§ 25) quand nous avons cherché, soit comme une application des formules d'Euler, soit par une voie directe, l'équation d'une section plane.

L'équation du plan proposé étant

$$(P) \qquad Ax + By + Cz = 0, \qquad (A > 0)$$

on a, d'abord,

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{A}{B},$$

et, par suite, ψ étant plus petit que π,

$$(1) \quad \sin\psi = +\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \cos\psi = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

D'autre part, les équations de la normale à (P) sont

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C},$$

et l'on a

$$(2) \quad \cos\theta = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \text{et} \quad \sin\theta = \pm\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Les formules (1) et (2), ces dernières étant prises avec des signes convenablement choisis, sont celles qu'il faut employer pour trouver l'équation d'une section plane.

60. Perpendicularité de deux plans. On sait que deux plans sont perpendiculaires lorsque leurs axes sont rectangulaires. Soient,

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

les équations des plans considérés ; les formules (E) et (F),

prouvent que la condition nécessaire et suffisante qui exprime que ces plans sont rectangulaires est

$$(I)\quad AA'+BB'+CC'=0.$$

61. Problème. *Abaisser d'un point* M_1, *une perpendiculaire* Δ' *sur une droite donnée* Δ.

Désignons, comme toujours, par (x_1, y_1, z_1), les coordonnées du point M_1 et soient

$$(\Delta)\quad \begin{cases} P=A'x+B'y+C'z+D'=0 \\ Q=A''x+B''y+C''z+D''=0 \end{cases}$$

les équations de Δ. La droite Δ' peut être considérée comme étant l'intersection de deux plans R et S ; le premier passant par M_1 et par Δ, l'autre étant le plan abaissé du point M_1, perpendiculairement à Δ.

L'équation de R est

$$PQ_1-QP_1=0,$$

et celle de S, d'après la relation (D),

$$(B'C''-C'B'')(x-x_1)+(C'A''-A'C'')(y-y_1)+(A'C''-C'A'')(z-z_1)=0.$$

62. Angle de deux droites. Si nous prenons les équations des droites proposées sous la forme

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},\quad \text{et,}\quad \frac{x-x_1}{\alpha'}=\frac{y-y_1}{\beta'}=\frac{z-z_1}{\gamma'},$$

les formules (E) (§ 55), et la suivante

$$\cos V=AA'+BB'+CC'$$

établie plus haut (§ 15), donnent

$$(J)\quad \cos V=\pm\frac{\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)}}\cdot\cdot\quad \begin{pmatrix}\gamma>0\\ \gamma'>0\end{pmatrix}$$

Dans cette formule, le signe + correspond à l'angle (bien déterminé) formé par les semi-droites menées par un point

de l'espace parallèlement aux directions positives des droites données. Il reste entendu que α, β, γ ; α', β', γ' ; représentent les coordonnées des points directeurs.

63. Angle d'une droite Δ, et d'un plan P. On sait que cet angle V′ est l'angle aigu complémentaire de celui qui est formé par Δ et par l'axe de P.

Les équations données étant

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},$$
$$Ax+By+Cz+D=0,$$

la normale au plan P, menée par l'origine, a pour équations

$$\frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}.$$

La formule (J) du paragraphe précédent donne

$$\text{(K)}\quad \sin V'=\pm\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}}.$$

Dans cette égalité on prendra le signe +, ou le signe —, suivant celui de l'expression $A\alpha+B\beta+C\gamma$.

64. Angle de deux plans. Soient

$$Ax+By+Cz+D=0,\quad (C>0)$$
$$ax+by+cz+d=0,\quad (c>0)$$

les équations des deux plans donnés.

Les axes de ces plans correspondent aux équations

$$(\Delta)\quad \frac{x}{A}=\frac{y}{B}=\frac{z}{C}.\qquad (\Delta')\quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c};$$

et l'angle V formé par les semi-normales positives a un cosinus donné par l'égalité

$$\text{(L)}\quad \operatorname{Cos} V=\frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(a^2+b^2+c^2)}},$$

cet angle V est celui qui est formé par les semi-plans positifs.

65. Distance d'un point à un plan. Nous chercherons d'abord à déterminer la distance de l'origine au plan qui a pour équation

$$P = Ax + By + Cz + D = 0.$$

Abaissons de l'origine une perpendiculaire OL sur le plan proposé ABC. En conservant les notations adoptées plus haut, l'équation de ABC est

$$(2) \quad x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = h$$

En identifiant les équations (1) et (2), nous avons

$$\frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\cos \beta}{B} = \frac{\cos \gamma}{C} = \frac{-h}{D}.$$

De ces égalités, et de la relation

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 0,$$

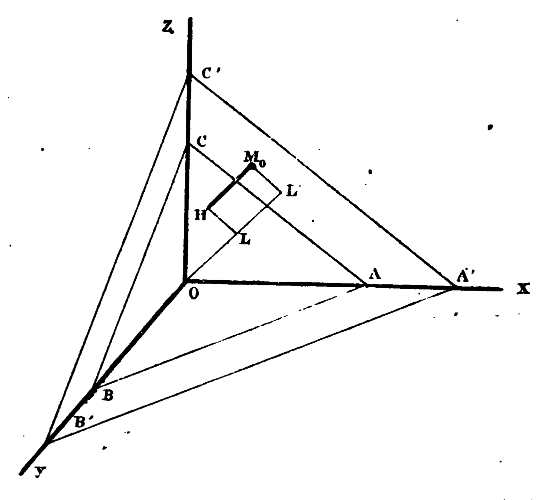


Fig. 10.

nous déduisons,

$$h = \pm \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Dans cette formule on prend le signe +, ou le signe —, suivant que l'origine est placée dans la région positive, ou dans la région négative, par rapport au plan ABC.

Prenons maintenant un point M_0 (x_0, y_0, z_0), et, de ce point abaissons sur ABC la perpendiculaire M_0H. Si nous menons par M_0 un plan A'B'C' parallèle à ABC et si nous prolongeons OL jusqu'à sa rencontre en L' avec A'B'C', nous pouvons écrire

$$M_0H = OL' - OL.$$

L'équation de A'B'C' est

$$Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0.$$

Supposons que l'origine soit placée dans la partie positive du plan ABC ; alors, dans la disposition de la figure, O est aussi situé dans la région positive de A'B'C' et nous avons, en valeur absolue

$$OL' = \frac{-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ et } OL = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

par suite

$$OL' - OL = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

ou,

$$M_0H = \frac{-P_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le point M_0 est situé dans la région négative de ABC et nous avons, par conséquent, $P_0 < 0$; si nous supposions $P_0 > 0$, la formule précédente donnerait encore la distance cherchée, mais le second membre devrait être affecté du signe +.

66. Distance d'un point à une droite. Il est naturel de rattacher ce problème au précédent en observant que la distance δ, d'un point M_0 (x_0, y_0, z_0) à une droite Δ est égale

à la longueur de la perpendiculaire M_0H abaissée de M_0 sur le plan S qui passe par Δ et qui est perpendiculaire au plan R déterminé par Δ et par M_0.

Soient

$$(\Delta)\begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = P = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = Q = 0, \end{cases}$$

les équations de Δ. Le plan R a pour équation

$$(R) \quad PQ_0 - QP_0 = 0,$$

et le plan S peut être représenté par l'égalité

$$(S) \quad P\alpha - Q\beta = 0.$$

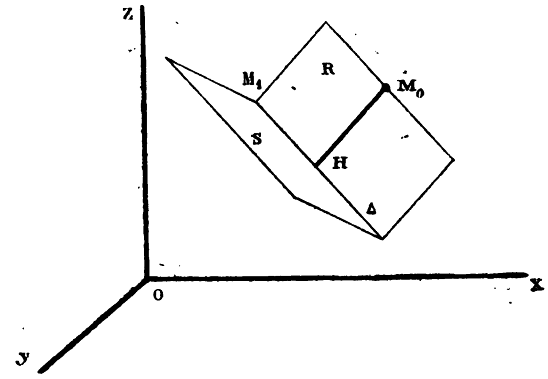


Fig. 11.

On a donc

$$(1) \quad \delta^2 = \frac{(P_0\alpha - Q_0\beta)^2}{u^2 + v^2 + w^2},$$

en posant

$$(2) \quad u = A'\alpha - A''\beta, \quad v = B'\alpha - B''\beta, \quad w = C'\alpha - C''\beta.$$

Les équations (R) et (S) représentent, par hypothèse, des plans perpendiculaires; en rendant explicites les formes qui

entrent dans le premier membre et en appliquant la condition connue (§ 60), on a

$$(3) \quad uu' + vv' + ww' = 0,$$

après avoir posé

$$(4) \quad u' = A'Q_0 - A''P_0, \quad v' = B'Q_0 - B''P_0, \quad w' = C'Q_0 - C''P_0.$$

D'ailleurs, l'identité de Lagrange donne

$$(5) \quad (u^2+v^2+w^2)(u'^2+v'^2-w'^2)-(uu'+vv'+ww')^2 = (uv'-vu')^2 + (vw'-wv')^2 + (wu'-uw')^2.$$

Les égalités (2) et (4) prouvent que l'on a

$$uv' - vu' = (A'B'' - B'A'')(Q_0\beta - P_0\alpha),$$
$$vw' - wv' = (B'C'' - C'B'')(Q_0\beta - P_0\alpha),$$
$$wu' - uw' = (C'A'' - A'C'')(Q_0\beta - P_0\alpha).$$

En tenant compte de la relation (3), l'identité (5) donne l'égalité suivante :

$$(u^2 + v^2 + w^2)(u'^2 + v'^2 + w'^2) = (P_0\alpha - Q_0\beta)^2 \left\{ (A'B'' - B'A'')^2 + (B'C'' - C'B'')^2 + (C'A'' - A'C'')^2 \right\}$$

D'après cela, la formule (1) devient

$$\delta^2 = \frac{(A'Q_0 - A''P_0)^2 + (B'Q_0 - B''P_0)^2 + (C'Q_0 - C''P_0)^2}{(A'B'' - B'A'')^2 + (B'C'' - C'B'')^2 + (C'A'' - A'C'')^2}.$$

Si l'on observe que les équations

$$AQ - A'P = 0, \quad BQ - B'P = 0, \quad CQ - C'P = 0,$$

représentent les projections de la droite donnée sur les trois plans de coordonnées, la formule précédente, malgré sa complication apparente, s'impose facilement à la mémoire.

67. Remarque. Lorsque les équations de la droite Δ ont été mises sous la forme

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - y_1}{\beta} = \frac{z - z_1}{\gamma}$$

la distance δ d'un point $M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ à cette droite s'obtient facilement par les considérations suivantes.

Menons par M_0 un plan P perpendiculaire à Δ, ce plan coupe Δ au point H et l'on a

$$\delta^2 = \overline{M_0H}^2 = \overline{M_0M_1}^2 - \overline{M_1H}^2.$$

L'équation de P est

$$(P) \quad \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0,$$

et la distance M_1H est donnée par la formule

$$\overline{M_1H}^2 = \frac{\{\alpha(x_1-x_0)+\beta(y_1-y_0)+\gamma(z_1-z_0)\}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

Ainsi,

$$\delta^2 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 - \frac{\{\alpha(x_1-x_0)+\beta(y_1-y_0)+\gamma(z_1-z_0)\}}{\gamma^2+\beta^2+\alpha^2}$$

ou, en appliquant l'identité de Lagrange,

$$\delta^2 = \frac{\{\beta(x_1-x_0)-\alpha(y_1-y_0)\}^2+\{\gamma(y_1-y_0)-\beta(z_1-z_0)\}^2+\{\alpha(z_1-z_0)-\gamma(x_1-}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$$

68. Projection d'un point sur une droite. Pour déterminer le pied H de la perpendiculaire abaissée de M_0 sur Δ, on peut observer que ce point est l'intersection de Δ avec le plan P.

Les équations (Δ) écrites sous la forme.

$$\frac{(x-x_0)+(x_0-x_1)}{\alpha} = \frac{(y-y_0)+(y_0-y_1)}{\beta} = \frac{(z-z_0)+(z_0-z_1)}{\gamma},$$

donnent, par combinaison avec (P)

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma} = \frac{\alpha(x_0-x_1)+\beta(y_0-y_1)+\gamma(z_0-z_1)}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2},$$

Dans ces formules, x, y, z désignent les coordonnées du point H, projection de M_0 sur Δ.

69. Plans bissecteurs. Les deux plans qui ont, respectivement, pour équation

$$P = Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$p = ax + by + cz + d = 0,$$

forment un dièdre auquel correspondent deux plans bissecteurs. On sait que tout point pris sur l'un de ces plans est à égale distance des faces du dièdre. L'un de ces plans a pour équation

$$\frac{P}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{p}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

l'autre, correspond à la même équation, en affectant du signe —, l'un des radicaux.

Les deux plans proposés séparent l'espace en quatre régions; le raisonnement que nous avons fait en géométrie plane (§ 76), peut se reproduire ici et l'on voit, dans tous les cas, quelle est celle des deux équations qu'il faut choisir pour représenter le plan bissecteur qui est situé dans une région déterminée; par exemple, dans celle qui renferme l'origine.

70. Plus courte distance de deux droites. (*Longueur*) Imaginons deux droites Δ, Δ', non situées dans le même plan, et correspondant respectivement aux équations

$$(\Delta)\ \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},\quad (\Delta')\ \frac{x - x_1}{\alpha'} = \frac{y - y_1}{\beta'} = \frac{z - z_1}{\gamma'}.$$

Menons par Δ un plan P parallèle à Δ' ; l'équation de ce plan est de la forme

$$(1)\quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

et si nous écrivons qu'il est parallèle aux droites Δ et Δ', nous avons

$$(2)\quad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$
$$(3)\quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = 0.$$

Les relations (1), (2), et (3), donnent, pour l'équation de P,

$$(P) \quad \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} = 0.$$

On sait que la longueur d de la plus courte distance est égale à celle de la perpendiculaire abaissée, sur le plan P, d'un point quelconque de Δ'. En posant, pour abréger l'écriture,

$$\delta_\alpha = \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}, \quad \delta_\beta = \begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}, \quad \delta_\gamma = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix};$$

nous avons donc,

$$d = \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{\delta_\alpha^2+\delta_\beta^2+\delta_\gamma^2}}.$$

71. Plus courte distance de deux droites. (*Équations.*) La situation de la plus courte distance se détermine en prenant l'intersection de deux plans U, V, perpendiculaires au plan P que nous venons de considérer, et passant : l'un par Δ, l'autre par Δ'.

Cherchons, d'abord, l'équation de V.

Cette équation est de la forme :

$$(1) \quad a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0,$$

et nous avons

$$(2) \quad a\alpha'+b\beta'+c\gamma'=0;$$

égalité qui est vérifiée puisque V passe par Δ'

Maintenant, si nous tenons compte de ce fait que V et P sont deux plans perpendiculaires, nous obtenons la relation

$$(3) \quad a\delta_\alpha+b\delta_\beta+c\delta_\gamma=0.$$

Les équations (1), (2) et (3), donnent, finalement,

$$(V) \quad \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \delta_\alpha & \delta_\beta & \delta_\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

On trouve de même l'équation de U,

$$(U) \quad \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta_{\alpha'} & \delta_{\beta'} & \delta_{\gamma'} \end{vmatrix} = 0.$$

72. Aire d'un triangle ($M_1 M_2 M_3$). Nous supposons que trois points soient donnés par leurs coordonnées et nous proposons de déterminer l'aire du triangle correspondant, en fonction de ces coordonnées.

Le triangle $M_1 M_2 M_3$ se projette sur le plan XOY suivant un triangle dont, d'après une formule connue, l'aire est égale à

$$\pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

En appliquant cette remarque aux trois projections de $M_1 M_2 M_3$ sur les plans de coordonnées et en observant que le carré de l'aire S, du triangle $M_1 M_2 M_3$, est égale à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires, nous avons

$$4 S^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2.$$

73. Volume du tétraèdre ($M_0 M_1 M_2 M_3$). L'équation du plan $M_1 M_2 M_3$ est

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

et la distance h, de M_0, à ce plan, se calcule par la formule

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2}}$$

En tenant compte de la formule établie au paragraphe précédent, cette relation devient

$$\pm 2h\,S = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$(1) \quad \pm 6 \operatorname{vol} (M_0M_1M_2M_3) = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Dans le cas particulier où le point M_0 se confond avec l'origine, cette formule se simplifie et donne la relation

$$(2) \quad \pm 6 \operatorname{vol}(OM_1M_2M_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

74. Remarque. Lorsque l'on a

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

les trois points $M_1\,M_2\,M_3$ sont situés dans un plan passant par l'origine. Cette propriété est la conséquence évidente de la formule (2) ; elle peut aussi se reconnaître directement, et très simplement.

EXERCICES

1. *Trouver la plus courte distance d, entre l'axe des z et une droite Δ ayant pour équations :*

$$(\Delta) \qquad \begin{cases} z = Ax + By + h, \\ z = A'x + B'y + h'. \end{cases}$$

On applique la remarque qui concerne la projection d'un angle droit sur un plan qui est parallèle à l'un des côtés de cet angle, et l'on a

$$\pm d = \frac{h - h'}{\sqrt{(A - A')^2 + (B - B')^2}}.$$

2. *Démontrer que la distance d'un point* M_0 (x_0, y_0, z_0) *à la droite Δ qui a pour équations :*

$$z = h, \qquad y = mx + n,$$

est donnée par la formule

$$d^2 = (z_0 - h)^2 + \frac{(y_0 - mx_0 - n)^2}{1 + m^2};$$

et reconnaître que la formule générale établie plus haut (§ 65) *donne bien cette valeur de d, dans le cas particulier considéré.*

3. *Démontrer que les droites qui correspondent aux équations*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'}, \quad \frac{x}{\alpha''} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\gamma''},$$

sont dans un plan, lorsque l'on a

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 0,$$

et réciproquement.

4. *Démontrer que si l'on considère les équations :*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'},$$

et les droites qui leur correspondent: les équations de la normale à ces deux droites sont:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \gamma' \\ \alpha & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}}.$$

5. *On considère les droites Δ, Δ', qui ont pour équations :*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{6'} = \frac{z}{\gamma'},$$

démontrer que les équations des bissectrices sont

$$\frac{x}{\alpha + \alpha'} = \frac{y}{6 + 6'} = \frac{z}{\gamma + \gamma'} \quad et \quad \frac{x}{\alpha - \alpha'} = \frac{y}{6 - 6'} = \frac{z}{\gamma - \gamma'};$$

α, 6, γ; α', $6'$, γ' désignant les cosinus directeurs.

On prend sur Δ et Δ' les points directeurs P et P' et l'on remarque que l'une des bissectrices est la droite qui joint l'origine au milieu de PP'. En considérant le point P'' symétrique de P par rapport à l'origine O, on a la seconde bissectrice en joignant le point O au milieu de PP''.

6. *Par deux droites Δ, Δ', non situées dans le même plan, on fait passer deux plans rectangulaires; trouver le lieu décrit par la droite d'intersection.*

On prend pour axe des z la perpendiculaire commune, pour origine le milieu O de cette droite et pour axe des x et des y les bissectrices des parallèles menées à Δ et à Δ', par le point O.

En désignant la plus courte distance par $2h$ on trouvera, pour l'équation du lieu cherché,

$$y^2 - m^2x^2 + (1 - m^2)z^2 = h^2(1 - m^2).$$

Dans cette équation on suppose $m = \operatorname{tg}\alpha$, 2α étant l'angle des deux droites données.

7. *Démontrer que la distance δ du point M_0 (x_0, y_0, z_0) au plan qui correspond à l'équation*

$$P = Ax + By + Cz + D = 0.$$

est

$$\delta = \pm \frac{P_0\sqrt{\Delta_0}}{\sqrt{A^2\sin^2\lambda + B^2\sin^2\mu + C^2\sin^2\nu + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)}}$$

λ, μ, ν désignant les angles des axes.

SIXIÈME LEÇON

LA SPHÈRE (Axes obliques)

75. Équation générale de la sphère. Désignons par R le rayon de la sphère, et par x_0, y_0, z_0, les coordonnées de son centre; nous avons (§ 10),

$$S = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)\cos\nu \\ + 2(y-y_0)(z-z_0)\cos\lambda + 2(z-z_0)(x-x_0)\cos\mu - R^2 = 0.$$

C'est l'équation cherchée; elle est du second degré par rapport aux coordonnées courantes x, y, z.

Nous conserverons les notations que nous avons employées dans la géométrie plane; nous désignerons encore par δ le discriminant de la forme binaire

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy,$$

et par Δ celui de la forme ternaire

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

Nous aurons aussi à considérer, dans la suite, la forme quadratique Q, à quatre variables,

$$Q = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2;$$

nous représenterons par H son discriminant.

Ainsi, nous poserons :

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' \\ B'' & A' \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix},$$

et,

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

Dans le cas particulier où la forme quadratique considérée est

$$A(x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu)+2cxt+2c'yt+2c''zt+dt^2,$$

nous désignerons son Hessien par H_0 et nous représenterons par Δ_0, comme nous l'avons déjà fait, le discriminant de la forme quadratique qui est constituée par l'ensemble des termes du second degré en x, y et z.

76. Théorème. *Pour que l'équation* $Q=0$ *représente une sphère, il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$(1)\quad A = A' = A'' = \frac{B}{\cos\lambda} = \frac{B'}{\cos\mu} = \frac{B''}{\cos\nu}.$$

L'équation $S=0$, prouve immédiatement que ces conditions sont nécessaires; le calcul qui suit, et qui aboutit à une expression remarquable du rayon de la sphère, a pour but de montrer qu'elles sont suffisantes.

L'équation $S=0$, développée, devient

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu-2x(x_0+y_0\cos\nu+z_0\cos\mu) \\ &-2y(x_0\cos\nu+y_0+z_0\cos\lambda)-2z(x_0\cos\mu+y_0\cos\lambda+z_0) \\ &+x_0^2+y_0^2+z_0^2+2y_0z_0\cos\lambda+2z_0x_0\cos\mu+2x_0y_0\cos\nu-R^2=0. \end{aligned}$$

Les égalités (1) étant vérifiées, l'identification des équations $S=0$, $Q=0$, donne

$$(1)\quad x_0+y_0\cos\nu+z_0\cos\mu+\frac{C}{A}=0,$$

$$(2)\quad x_0\cos\nu+y_0+z_0\cos\lambda+\frac{C'}{A}=0,$$

$$(3)\quad x_0\cos\mu+y_0\cos\lambda+z_0+\frac{C''}{A}=0;$$

et,

$$(4)\quad x_0^2+y_0^2+z_0^2+2y_0z_0\cos\lambda+2z_0x_0\cos\mu+2x_0y_0\cos\nu-R^2-\frac{D}{A}=0.$$

Les égalités précédentes constituent un système de quatre équations dans lesquelles les inconnues sont x_0, y_0, z_0, et R^2. Le déterminant des équations (1), (2), et (3), est la fonction Δ_0, quantité différente de zéro (§ 12). Ainsi, x_0, y_0, z_0, sont des nombres toujours finis et bien déterminés; mais il nous reste à calculer R^2.

A cet effet, multiplions les égalités (1), (2), (3), et (4), respectivement par x_0, y_0, z_0, et -1; puis ajoutons ces résultats. Nous avons alors,

$$(5)\quad \frac{C}{A}x_0+\frac{C'}{A}y_0+\frac{C''}{A}z_0+\frac{D}{A}+R^2=0.$$

Les équations (1), (2), (3), et (5) donnent alors

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \frac{C}{A} \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \frac{C'}{A} \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \frac{C''}{A} \\ \frac{C}{A} & \frac{C'}{A} & \frac{C''}{A} & \frac{D}{A}+R^2 \end{vmatrix}=0.$$

Les éléments de la quatrième colonne sont égaux, respectivement, à

$$\frac{C}{A}+0,\quad \frac{C'}{A}+0,\quad \frac{C''}{A}+0,\quad \frac{D}{A}+R^2,$$

et nous trouvons

$$\Delta_0 R^2 + \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \frac{C}{A} \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \frac{C'}{A} \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \frac{C''}{A} \\ \frac{C}{A} & \frac{C'}{A} & \frac{C''}{A} & \frac{D}{A} \end{vmatrix} = 0,$$

ou,

$$A^4 \Delta_0 R^2 + \begin{vmatrix} A & A\cos\nu & A\cos\mu & C \\ A\cos\nu & A & A\cos\lambda & C' \\ A\cos\mu & A\cos\lambda & A & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0$$

ou, enfin,

$$(\rho) \qquad H_0 + A^4 \Delta_0 R^2 = 0.$$

Cette égalité permet de calculer R^2; mais, Δ_0 étant positif, il faut pourtant observer que R est réel, ou imaginaire ; suivant que H_0 est négatif, ou positif.

La sphère n'étant qu'une quadrique particulière, les propriétés que nous démontrerons plus loin pour les quadriques quelconques s'appliqueront évidemment à cette surface; aussi, pour éviter certaines répétitions, nous bornerons-nous à signaler, dans cette étude analytique de la sphère, quelques-unes des propriétés qui lui sont particulières.

77. Puissance d'un point par rapport à une sphère. On sait que si par un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0) ou mêne une transversale Δ qui coupe une sphère donnée S, aux points A et B, le produit (MA. MB) est indépendant de la direction donnée à Δ. C'est la valeur de ce produit, valeur positive ou négative, qu'on appelle *puissance* de M, relativement à S.

Prenons les équations de Δ sous la forme.

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{6} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

et représentons l'équation de la sphère par

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les points A et B se détermineront en cherchant d'abord les racines de l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, \quad y_0 + \beta\rho, \quad z_0 + \gamma\rho) = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\rho^2 (A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta) \\ + \rho\left(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}\right) + f(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Dans le cas de la sphère, le coefficient de ρ^2 est

$$A\ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\cos\lambda + 2\alpha\gamma\cos\mu + 2\alpha\beta\cos\nu),$$

et nous savons (§ 20) que cette expression est égale à A.

Ainsi nous avons

$$MA.MB = \frac{f(x_0, y_0, z_0)}{A}$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. *La puissance d'un point par rapport à une sphère s'obtient en remplaçant, dans son équation, les coordonnées courantes par les coordonnées particulières du point considéré, et en divisant le résultat obtenu par le coefficient de* x^2.

Voici maintenant quelques propriétés élémentaires, bien connues, qui sont la conséquence immédiate du théorème que nous venons de démontrer.

78. Théorème. *Le lieu des points d'égale puissance, par rapport à deux sphères, est un plan qu'on a nommé* **plan radical** *des deux sphères.*

Soient

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0,$$

les équations des sphères proposées. Le lieu des points d'égale puissance est la surface qui a pour équation

$$\frac{S_1}{A_1} = \frac{S_2}{A_2}.$$

Dans cette relation, les termes du second degré disparaissent ; le lieu cherché est donc un plan qui, pour des raisons de symétrie évidentes, est perpendiculaire à la ligne des centres.

79. Théorème. *Les plans radicaux de trois sphères passent par une même droite qui est nommée l'***axe radical** *des trois sphères.*

En effet, les équations des sphères étant

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0;$$

celles des plans radicaux de ces sphères, combinées deux à deux, sont

$$\frac{S_1}{A_1} - \frac{S_2}{A_2} = 0, \quad \frac{S_2}{A_2} - \frac{S_3}{A_3} = 0, \quad \frac{S_3}{A_3} - \frac{S_1}{A_1} = 0;$$

Ces trois égalités, ajoutées membre à membre, donnent une identité : les plans qui leur correspondent concourent donc suivant une même droite.

80. Théorème. *Les axes radicaux de quatre sphères, combinées trois à trois, sont quatre droites qui concourent en un point; ce point est dit le* **centre radical** *des quatre sphères.*

En effet, les axes radicaux peuvent être considérés comme les droites qui sont communes aux six plans radicaux, combinés trois à trois. Or, les équations de ces plans :

$$\frac{S_1}{A_1} - \frac{S_2}{A_2} = 0, \quad \frac{S_1}{A_1} - \frac{S_3}{A_3} = 0, \quad \frac{S_1}{A_1} - \frac{S_4}{A_4} = 0,$$

$$\frac{S_2}{A_2} - \frac{S_3}{A_3} = 0, \quad \frac{S_2}{A_2} - \frac{S_4}{A_4} = 0, \quad \frac{S_3}{A_3} - \frac{S_4}{A_4} = 0;$$

admettent une solution commune ; car si les trois premières sont vérifiées par les coordonnées x', y', z' d'un certain point

ω, les trois autres le sont aussi. Le point ω est donc situé sur les quatre axes radicaux.

81. Théorème. *La section plane d'une sphère est une circonférence.*

Soit P le plan considéré, il coupe la sphère proposée suivant une courbe Γ; je dis que Γ est une circonférence.

Effectuons, en effet, un changement d'axes et prenons le plan P pour plan XOY; la fonction S *devient* Σ, et, comme nous l'avons démontré (§ 26), nous avons

$$\Sigma = K(X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda' + 2ZX\cos\mu' + 2XY\cos\nu') + \varphi_1 + \varphi_0.$$

Si nous faisons $Z = 0$, dans l'égalité $\Sigma = 0$, nous obtenons un résultat qui représente un cercle. La section Γ est donc une circonférence.

82. Théorème. *Les points communs à deux sphères sont situés sur un cercle.*

Ce théorème est le corollaire évident du précédent. Si les sphères ont pour équation, respectivement,

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0,$$

on peut remplacer l'une d'elles par la suivante

$$\frac{S_1}{A_1} - \frac{S_2}{A_2} = 0.$$

Or cette équation est celle d'un plan; l'intersection de deux sphères est donc une circonférence.

83. Sphère circonscrite à un tétraèdre. (*Axes rectangulaires.*) L'équation générale d'une sphère, en axes rectangulaires, étant

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z - \delta = 0,$$

si l'on exprime que cette sphère passe par quatre points (M_0, M_1, M_2, M_3) qui forment un véritable tétraèdre, on a d'abord

$$(2) \quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 - \delta = 0,$$

et, aussi, trois relations analogues. En éliminant $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entre les équations (1) et (2) et les trois égalités qui sont sous-entendues, on obtient l'équation cherchée

$$(3) \quad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_0^2+y_0^2+z_0^2 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Le coefficient du terme $(x^2+y^2+z^2)$ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

déterminant qui n'est pas nul, puisque nous supposons que les points considérés ne sont pas placés dans le même plan.

Si l'on veut déterminer le centre O, de la sphère circonscrite au tétraèdre, il faut observer que l'équation (1) étant écrite sous la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta,$$

les coordonnées de O sont α, β, γ.

D'autre part, l'équation (2) et les équations analogues, soustraites deux à deux, donnent

$$(4) \quad 2\alpha(x_1-x_0)+2\beta(y_1-y_0)+2\gamma(z_1-z_0)-(x_1^2-x_0^2)-(y_1^2-y_0^2)-(z_1^2-z_0^2)=0,$$

et cinq autres relations semblables.

Si α, β, γ, sont des coordonnées courantes, ces égalités représentent des plans perpendiculaires aux arêtes du tétraèdre et passant, respectivement, par les milieux de ces droites. C'est ainsi que l'égalité (4) est vérifiée quand on fait

$$\alpha = \frac{x_1+x_0}{2}, \quad \beta = \frac{y_1+y_0}{2}, \quad \gamma = \frac{z_1+z_0}{2}.$$

SEPTIÈME LEÇON

PLAN TANGENT. — PLAN POLAIRE

84. Définition. Considérons une surface Σ et, sur cette surface, un point fixe M. Si nous imaginons qu'un point M_1, mobile sur Σ, se rapproche indéfiniment de M, la droite MM_1 occupe, à la limite, une position MT, et nous dirons que MT est une tangente à Σ au point M.

85. Théorème. *Le lieu des tangentes à une surfacc Σ, en un point pris sur elle, est, en général, un plan.*

Soit M le point choisi, M_1 un point voisin pris sur Σ et M_0 un point quelconque de MM_1. Les notations ordinaires étant conservées, on a

$$\frac{x_1}{x+\lambda x_0}=\frac{y_1}{y+\lambda y_0}=\frac{z_1}{z+\lambda z_0}=\frac{t_1}{t+\lambda t_0}.$$

Soit

$$f(x, y, z, t)=0,$$

l'équation de Σ; λ sera déterminé par l'égalité

$$f(x+\lambda x_0,\quad y+\lambda y_0,\quad z+\lambda z_0,\quad t+\lambda t_0)=0.$$

Cette relation s'écrit

$$(1)\quad f(x,y,z,t)+\lambda\left(x_0 f'_x+y_0 f'_y+z_0 f'_z+t_0 f'_t\right)+\dots=0.$$

On peut alors remarquer que le point M étant sur Σ on a,

$$f(x, y, z, t)=0,$$

et, parmi les racines de l'équation (1), se trouve la solution $\lambda=0$. Si nous supposons que $f(x,y,z,t)$ désigne

une forme entière et homogène, du degré m, l'équation (1) admet encore $m-1$ solutions qui sont les racines de l'équation :

$$(2)\quad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t + \frac{\lambda}{1 \cdot 2}\left(x_0 f_x + y_0 f_y + z_0 f_z + t_0 f_t\right)^2 + \ldots = 0 \text{ (1)}$$

Si le point M_1 vient se confondre avec M, cette équation doit admettre encore la solution $\lambda = 0$, et la relation

$$x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t = 0,$$

doit être vérifiée. Dans cette égalité, x_0, y_0, z_0, t_0, désignent les coordonnées d'un point quelconque M_0, pris sur une tangente à Σ, passant par M. Le lieu des points tels que M_0, est donc la surface qui correspond à l'équation

$$(\theta)\quad X f'_x + Y f'_y + Z f'_z + T f'_t = 0;$$

ce lieu est un plan.

Cette conclusion cesse d'être exacte quand on a, simultanément,

$$(3)\quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0, \quad f'_t = 0;$$

nous allons examiner, de plus près, ce cas singulier.

86. Points multiples. Lorsqu'un point P pris sur une surface Σ jouit de cette propriété que toute droite Δ, passant par P, rencontre Σ en m points, dont μ coïncident avec P, on dit que P est un point de multiplicité μ, sur la surface Σ.

Si les coordonnées de P ne vérifient pas les équations (3), l'égalité (2) prouve que la transversale Δ menée par P ne rencontre Σ qu'en un point confondu avec P, du moins, en général. Dans ce cas, on a $\mu = 1$; P est un *point simple*.

1. En employant cette notation symbolique on fait la convention suivante :
dans le développement de

$$\left(x_0 f_x + y_0 f_y + z_0 f_z + t_0 f_t\right)^p,$$

on remplace les exposants qui affecteraient la lettre f, par les indices qui indiquent l'ordre des dérivées.

Si, au contraire, les équations (2) sont vérifiées, la relation (2) devient :

$$\frac{1}{1.2}(x_0f_x+y_0f_y+z_0f_z+t_0f_t)^2+\frac{1}{1.2.3}\lambda(x_0f_x+y_0f_y+z_0f_z+t_0f_t)^3+\ldots=0,$$

et si nous cherchons le lieu des droites qui, passant par P, rencontrent la surface en trois points confondus avec P, cette équation prouve que le lieu cherché est le cône qui correspond à l'équation suivante :

$$(Xf_x+Yf_y+Zf_z+Tf_t)^2=0. \quad \textit{(Notation symbolique.)}$$

Lorsque les dérivées secondes ne sont pas nulles, simultanément, P est un point double et les tangentes à la surface, en ce point, forment un cône du second ordre, ou un système de deux plans.

S'il arrive que toutes les dérivées secondes soient nulles ; le point considéré est un point triple, et les tangentes à la surface forment un cône du troisième ordre dont l'équation est

$$(Xf'_x+Yf'_y+fZ'_z+Tf'_t)^3=0;$$

et, ainsi de suite.

87. Plan tangent aux quadriques. Si nous appliquons à l'équation $Q=0$ la formule (θ), nous obtenons le résultat suivant :

$$X(Ax+B''y+B'z+Ct)+Y(B''x+A'y+Bz+C't)$$
$$+Z(B'x+By+A''z+C''t)+T(Cx+C'y+C''z+Dt)=0.$$

Cette égalité peut s'écrire encore

$$x(AX+B''Y+B'Z+CT)+y(B''X+A'Y+BZ+C'T)$$
$$+z(B'X+BY+A''Z+C''T)+t(CX+C'Y+C''Z+DT)=0;$$

ou,

$$xf'_X+yf'_Y+zf'_Z+tf'_T=0.$$

6

L'identité des deux formes

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t,$$
$$xf'_X + yf'_Y + zf'_Z + tf'_T,$$

est, d'ailleurs, la conséquence d'une propriété générale des formes quadratiques (*Alg.*, § 349).

88. Remarque I. L'équation du plan tangent au point (x, y, z, t), étant, comme nous venons de le montrer,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0,$$

et ce plan passant par le point considéré, nous avons

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 0$$

Ces deux équations donnent

$$(\theta') \quad (X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0.$$

Cette forme, donnée à l'équation du plan tangent, est quelquefois utile.

89. Remarque II. *Lorsqu'une surface Σ passe par l'origine O, si O est un point simple de cette surface, le plan tangent en O s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes du premier degré.*

En effet, l'équation de Σ est, dans l'hypothèse que nous avons adoptée,

$$f = \varphi_m(x, y, z) + t\varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots + t^{m-1}(ax + by + cz) = 0.$$

L'équation du plan tangent à l'origine est, d'après (θ'),

$$Xf'_0 + Yf'_0 + Zf'_0 = 0,$$

ou, finalement,

$$ax + by + cz = 0.$$

90. Remarque III. *Lorsqu'une droite Δ est située sur une surface Σ, le plan tangent en un point quelconque de Δ, renferme cette droite.*

Prenons Δ pour axe des z ; l'équation générale des surfaces passant par l'axe OZ est :

$$(1) \quad f = \varphi_m(x,y,z) + t\varphi_{m-1}(x,y,z) + \ldots + t^{m-1}(Ax + By) = 0,$$

φ_m ne renfermant pas le terme en z^m ; φ_{m-1}, le terme en z^{m-1} ; etc. Prenons, sur OZ, un point M dont les coordonnées soient o, o, et h. Le plan tangent en ce point a pour équation :

$$(2) \quad Xf'_0 + Yf'_0 + (z - h)f'_h = 0.$$

L'équation (1) ne renfermant aucun des termes z^m, z^{m-1}, z^{m-2}, ... z, la fonction f'_z s'annule, identiquement, quand on y fait $x = 0$, et $y = 0$, *quel que soit h*. L'équation (2) se réduit donc à la forme

$$Xf'_0 + Yf'_0 = 0,$$

ainsi, le plan qui lui correspond passe par l'axe OZ.

Cette proposition est la conséquence, tout à fait évidente, de la définition du plan tangent, mais nous avons tenu à la vérifier par l'analyse.

91. Équation de Plücker. — Théorème. *Lorsque l'équation d'une surface se présente sous la forme*

$$f(R, S, U, V) = 0,$$

f désignant une fonction entière des formes linéaires R,S,U,V :

$$\begin{aligned} R &= ax + by + cz + dt, \\ S &= a'x + b'y + c'z + d't, \\ U &= a''x + b''y + c''z + d''t, \\ V &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t; \end{aligned}$$

l'équation du plan tangent P *au point* $M_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ *est*

$$Rf'_{R_1} + Sf'_{S_1} + Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} = 0.$$

En effet, nous avons

$$f'_x = af'_P + a'f'_Q + a''f'_R + a'''f'_S,$$
$$f'_y = bf'_P + b'f'_Q + b''f'_R + b'''f'_S,$$
$$f'_z = cf'_P + c'f'_Q + c''f'_R + c'''f'_S,$$
$$f'_t = df'_P + d'f'_Q + d''f'_R + d'''f'_S.$$

L'équation du plan tangent au point M_1 est donc

$$(aX + bY + cZ + dT)f'_{R_1} + (a'X + b'Y + c'Z + d'T)f'_{S_1}$$
$$+ (a''X + b''Y + c''Z + d''T)f'_{U_1} + (a'''X + b'''Y + c'''Z + d'''T)f'_{V_1} = 0,$$

ou,

$$(\theta'') \quad Rf'_{R_1} + Sf'_{S_1} + Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} = 0.$$

C'est l'équation que nous voulions établir.

On doit remarquer que l'équation de Plücker est applicable à une forme entière quelconque ; elle est vérifiée quel que soit le nombre des fonctions linéaires qui entrent dans l'équation considérée.

92. Cône circonscrit aux quadriques. Par un point M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0) on peut mener une infinité de droites tangentes à une quadrique $(Q = 0)$. Nous allons montrer que le lieu de ces droites est le cône qui correspond à l'équation

$$4QQ_0 = \left(xQ'_{x_0} + yQ'_{y_0} + zQ'_{z_0} + tQ'_{t_0}\right)^2.$$

Par le point M_0 menons une transversale quelconque Δ et soit $M(x, y, z, t)$, un des points communs à Δ et à la quadrique proposée. Prenons sur Δ un troisième point M_1 (x_1, y_1, z_1, t_1), nous avons

$$\frac{x}{x_0 + \lambda x_1} = \frac{y}{y_0 + \lambda y_1} = \frac{z}{z_0 + \lambda z_1} = \frac{t}{t_0 + \lambda t_1};$$

et si nous posons,

$$Q = f(x, y, z, t),$$

nous obtenons

$$f(x_0+\lambda x_1, \quad y_0+\lambda y_1, \quad z_0+\lambda z_1, \quad t_0+\lambda t_1)=0.$$

Cette équation développée donne le résultat suivant :

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0)+\left(x_1 f'_{x_0}+y_1 f'_{y_0}+z_1 f'_{z_0}+t_1 f'_{t_0}\right)\lambda+f(x_1, y_1, z_1, t_1)\lambda^2=0$$

ou, dans une notation un peu plus simple,

$$Q_0+\left(x_1 Q'_{x_0}+y_1 Q'_{y_0}+z_1 Q'_{z_0}+t_1 Q'_{t_0}\right)\lambda+Q_1\lambda^2=0.$$

La droite Δ sera tangente à la quadrique, si les coordonnées du point M_1 vérifient l'équation :

$$4Q_1Q_0=\left(x_1 Q'_{x_0}+y_1 Q'_{y_0}+z_1 Q'_{z_0}+t_1 Q'_{t_0}\right)^2.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante ; comme elle est vérifiée par les coordonnées d'un point arbitrairement choisi sur l'une quelconque des tangentes issues de M_0 à la quadrique, en rendant x_1, y_1, z_1, t_1, coordonnées courantes, on a, finalement,

$$\text{(C)} \qquad 4QQ_0=\left(xQ'_{x_0}+yQ'_{y_0}+zQ'_{z_0}+tQ'_{t_0}\right)^2.$$

93. Définition de la classe des surfaces. On appelle *classe* d'une surface Σ le nombre de plans tangents que l'on peut mener à Σ par une droite Δ, prise arbitrairement dans l'espace.

Soient M_0, M_1, deux points pris sur Δ, en exprimant que le plan tangent à la surface qui correspond à l'équation

$$f(x, y, z, t)=0,$$

au point M (x, y, z, t) pris sur cette surface, passe par M_0 et M_1, on a, pour déterminer les coordonnées du point M, les équations :

$$\begin{gathered} f(x, y, z, t)=0, \\ x_0 f'_x+y_0 f'_y+z_0 f'_z+t_0 f'_t=0, \\ x_1 f'_x+y_1 f'_y+z_1 f'_z+t_1 f'_t=0. \end{gathered}$$

Il résulte de là que *la classe d'une surface de l'ordre m est tout au plus égale à* $m(m-1)^2$.

En particulier, *les surfaces du second ordre sont aussi des surfaces de la seconde classe.*

94. Normales. La normale à une surface Σ, en un point M pris sur cette surface, est la perpendiculaire élevée en M au plan tangent P, à Σ, en ce point M.

Si l'on désigne par x, y, z, t, les coordonnées de M, l'équation de P étant

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + Tf'_t = 0,$$

les équations de la normale sont

$$\frac{X-x}{f'_x} = \frac{Y-y}{f'_y} = \frac{Z-z}{f'_z}.$$

95. Plan polaire. Théorème. *Étant donnée une quadrique* Q; *si, par un point* M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0), *on mène une transversale mobile* Δ, *rencontrant* Q *aux points* A *et* B, *le lieu du point* μ, *conjugué harmonique de* M_0, *par rapport au segment* AB, *est un plan. Ce plan est appelé* **plan polaire** *de* M_0, *par rapport à* Q.

Soient X, Y, Z, T, les coordonnées de A et x, y, z, t, celles de μ, on a

$$\frac{X}{x_0 + \lambda x} = \frac{Y}{y_0 + \lambda y} = \frac{Z}{z_0 + \lambda z} = \frac{T}{t_0 + \lambda t},$$

λ désignant le rapport $\frac{AM_0}{A\mu}$.

L'équation de la quadrique étant

$$Q = f(X, Y, Z, T) = 0,$$

on a donc

$$f(x_0 + \lambda x, y_0 + \lambda y, z_0 + \lambda z, t_0 + \lambda t) = 0;$$

ou, comme nous l'avons déjà remarqué tout à l'heure,

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0) + \lambda (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0}) + \lambda^2 f(x, y, z, t) = 0.$$

Les deux valeurs de λ, qui sont les racines de cette équation, représentent les deux rapports :

$$\frac{AM_0}{A\mu}, \quad \frac{BM_0}{B\mu};$$

rapports qui sont égaux et de signes contraires. On a donc, finalement,

$$(P) \quad xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0.$$

Le lieu du point μ est le plan qui correspond à cette équation.

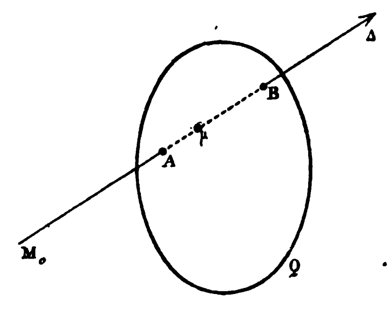


Fig. 12.

L'équation du plan polaire a la même forme que celle du plan tangent, mais les coordonnées du point de contact sont remplacées par celles du pôle. On peut observer que le plan polaire est représenté, indifféremment, par l'équation (P), ou par la suivante :

$$(P') \quad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z + t_0 f'_t = 0.$$

96. Remarque. Si l'on rapproche les équations (C) (§ 92), et (P), on observe que le cône circonscrit à Q et ayant pour sommet le point M_0, passe par la courbe d'intersection de Q avec le plan polaire de M_0. Ce résultat est évident, à *priori*,

puisque le point μ coïncide avec les points A et B, quand la transversale Δ rencontre Q en deux points confondus.

97. Équations de la tangente à une courbe. Imaginons une courbe C, intersection des surfaces qui correspondent aux équations :

$$U = 0, \quad V = 0.$$

Soit M_0 un point de C; la tangente à C, en ce point, est l'intersection des plans tangents aux surfaces considérées en ce même point. Par conséquent les équations cherchées sont :

$$xU'_{x_0} + yU'_{y_0} + zU'_{z_0} + tU'_{t_0} = 0,$$
$$xV'_{x_0} + yV_{y_0} + zV'_{z_0} + tV'_{t_0} = 0.$$

On peut d'ailleurs établir directement ce résultat en prenant les équations d'une droite passant par M_0 et un point M, pris sur C, et voisin de M_0; puis en supposant que M se rapproche de M_0 et vient se confondre avec lui.

Dans cette manière de faire, qui est l'inverse de celle que nous avons adoptée, on déduit l'équation du plan tangent de celles de la tangente.

98. Cylindre circonscrit à une quadrique. Supposons qu'une droite mobile Δ, rencontre une quadrique Q, en deux points coïncidents et qu'elle reste toujours parallèle à une direction fixe; savoir, celle de la droite qui a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma};$$

le lieu décrit par Δ est un cylindre qui a pour équation

$$\text{(D)} \qquad 4Q\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha Q'_x + \beta Q'_y + \gamma Q'_z)^2,$$

en désignant, comme d'habitude, par $\varphi(x, y, z)$ le groupe homogène des termes du second degré dans la forme Q.

Cette égalité peut se déduire de l'équation (C), (§ 92), en supposant que le point (x_0, y_0, z_0) s'éloigne à l'infini dans la

direction $(\alpha, 6, \gamma)$; mais nous voulons établir, directement, ce résultat.

Prenons sur Δ un point arbitraire $M(X, Y, Z)$; les coordonnées d'un point de cette droite sont alors exprimées par les formules :

$$x = X + \alpha\rho,$$
$$y = Y + 6\rho,$$
$$z = Z + \gamma\rho.$$

Écrivons que le point x, y, z est situé sur Q, et nous avons, pour déterminer ρ, l'équation

$$\varphi(X + \alpha\rho, Y + 6\rho, Z + \gamma\rho) + \varphi_1(X + \alpha\rho, Y + 6\rho, Z + \gamma\rho) + \varphi_0 = 0.$$

ou,

$$\rho^2\varphi(\alpha, 6, \gamma) + \rho\left[\alpha\varphi'_x + 6\varphi'_y + \gamma\varphi'_z + \varphi_1(\alpha, 6, \gamma)\right] + \varphi(X, Y, Z) + \varphi_1(X, Y, Z) + \varphi_0 = 0,$$

ou, encore,

$$\rho^2\varphi(\alpha, 6, \gamma) + \rho(\alpha Q'_x + 6Q'_y + \gamma Q'_z) + Q = 0.$$

Cette équation devant avoir ses racines égales, nous trouvons bien le résultat annoncé (D).

EXERCICES

1. *Vérifier que le plan tangent à la sphère est perpendiculaire sur le rayon qui aboutit au point de contact.*

2. *Exprimer que la droite qui correspond aux équations*

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{6} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

est tangente à la sphère ayant pour centre l'origine et un rayon égal à R.

On écrit que l'équation en ρ a deux racines égales ; le résultat est

$$(\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2).$$

3. *Démontrer les propriétés suivantes qui, dans la géométrie de l'espace, servent de base à la transformation par polaires réciproques :*

1° *Si un point* A *est mobile dans un plan* M ; *le plan polaire* α *de ce point* A *pivote autour d'un point fixe* μ *;* μ *étant le pôle de* M ; *et réciproquement.*

2° *Si* A *parcourt une certaine droite* Δ, α *pivote autour d'une droite fixe* Δ'. *Ces droites* Δ, Δ', *sont dites* **droites conjuguées**.

3° *Les droites conjuguées sont* **réciproques** *; c'est-à-dire que* Δ' *étant conjuguée de* Δ, *si un point* B *décrit* Δ', *sur son plan polaire* B *pivote autour de la droite* Δ ; Δ *est donc aussi la conjuguée de* Δ'.

HUITIÈME LEÇON

LES ENVELOPPES

99. Surfaces enveloppes. — Définition de la caractéristique. Supposons que l'équation d'une surface Σ,

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

renferme un paramètre variable α; si nous donnons à ce paramètre deux valeurs particulières :

$$\alpha, \quad \alpha + \Delta\alpha,$$

nous obtiendrons deux surfaces correspondantes Σ', Σ'', dont les équations sont, respectivement,

$$(\Sigma') \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad (\Sigma'') \quad f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = 0.$$

Ces deux surfaces Σ', Σ'', se coupent suivant une courbe γ, et les coordonnées d'un point quelconque de γ vérifient, simultanément, les deux équations suivantes :

$$f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad \frac{f(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Si nous imaginons maintenant que $\Delta\alpha$ tende vers zéro, la courbe γ a, en général, une position limite bien déterminée, que nous désignerons par Γ.

Cette courbe Γ, que *Monge* a appelée **la caractéristique**, a donc pour équations

$$(\Gamma) \quad f(x, y, z, \alpha) = 0, \qquad f'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

lité a lieu *quel que soit* K*;* et l'on obtient l'enveloppe, quand il en existe une, en éliminant α et β entre les équations

$$(1) \quad f = 0, \qquad f'_\alpha = 0, \qquad f'_\beta = 0.$$

104. Remarque. On doit observer que dans le cas de deux paramètres variables, l'idée de la caractéristique, et la propriété qui y est attachée, disparaissent. Les surfaces qui correspondent aux équations (1) ont, en général, un ou plusieurs points communs qu'on pourrait appeler *points caractéristiques.* Le calcul que nous venons d'indiquer a pour but la recherche du lieu décrit par ces points ; l'enveloppe trouvée est encore tangente aux enveloppées, non plus le long d'une courbe, mais seulement aux points caractéristiques.

105. Théorème. *Lorsque l'équation d'une surface* Σ *renferme trois paramètres variables* u, v, w, *cette équation étant*

$$(1) \quad f(x, y, z, u, v, w) = 0,$$

et les paramètres vérifiant l'égalité

$$(2) \quad \varphi(u, v, w) = 0;$$

l'enveloppe de Σ *s'obtient en éliminant* u, v, w, *entre les équations données et les suivantes :*

$$\frac{f'_u}{\varphi'_u} = \frac{f'_v}{\varphi'_v} = \frac{f'_w}{\varphi'_w}.$$

Si l'on peut tirer w de la relation (2), en portant cette expression dans (1), on retombe dans le cas que nous venons de traiter. S'il n'en est pas ainsi, on peut considérer w comme une fonction de u et de v. On a donc

$$f'_u + w'_u f'_w = 0, \qquad f'_v + w'_v f'_w = 0,$$

et,

$$\varphi'_u + w_u \varphi'_w = 0, \qquad \varphi'_v + w'_v \varphi'_v = 0.$$

Ces égalités donnent, finalement,

$$\frac{f'_u}{\varphi'_u}=\frac{f'_v}{\varphi'_v}=\frac{f'_w}{\varphi'_w}.$$

106. Application. *Trouver l'enveloppe de plan* P *qui a pour équation*

$$ux+vy+wz=1,$$

les paramètres u, v, w, vérifiant la relation

$$a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2=1.$$

Les égalités (1) appliquées à cet exemple, donnent :

$$\frac{x}{a^2u}=\frac{y}{b^2v}=\frac{z}{c^2w}.$$

On en déduit, d'abord,

$$\frac{ux}{a^2u^2}=\frac{vy}{b^2v^2}=\frac{wz}{c^2w^2}=\frac{ux+vy+wz}{a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2}=1,$$

puis,

$$1=\frac{\frac{x}{a}}{au}=\frac{\frac{y}{b}}{bv}=\frac{\frac{z}{c}}{cw}=\pm\frac{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}{1}.$$

L'équation de l'enveloppe est donc

$$\text{(E)}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

107. Idée des coordonnées tangentielles. Lorsque les paramètres u, v, w, qui représentent les inverses des coordonnées à l'origine du plan P qui a pour équation

$$(1)\qquad ux+vy+wz=1,$$

vérifient la relation

$$(2)\qquad \varphi(u,v,w)=0,$$

on dit que u, v, w, sont les *coordonnées tangentielles* du plan P, et (2) représente l'*équation tangentielle* de la surface enveloppée par P.

Nous venons de montrer, sur un exemple, comment on passait de l'équation tangentielle à l'équation cartésienne; on peut, de même, effectuer la transformation inverse et déduire, d'une équation cartésienne donnée, l'équation tangentielle de la surface qui correspond à celle-ci.

Prenons l'équation (E), trouvée tout à l'heure, et proposons-nous de trouver l'équation tangentielle qui lui correspond.

Soient x', y', z', les coordonnées d'un point M' de cette surface; le plan tangent en M' a pour équation

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1.$$

Nous avons donc,

$$u = \frac{x'}{a^2}, \qquad v = \frac{y'}{b^2}, \qquad w = \frac{z'}{c^2};$$

avec la condition :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1.$$

L'élimination des paramètres x', y', z', donne, finalement,

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 = 1;$$

nous retrouvons ainsi l'équation tangentielle considérée au paragraphe précédent.

108. Équation tangentielle générale des quadriques. Soit

$$ux + vy + wz + \varphi t = 0,$$

l'équation d'un plan P, que nous supposons tangent à la quadrique qui a pour équation

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

Soient (x_0, y_0, z_0, t_0) les coordonnées du point de contact. L'équation de P, sous une autre forme, étant,

$$xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0}+tf'_{t_0}=0,$$

nous avons donc

$$\frac{f'_{x_0}}{u}=\frac{f'_{y_0}}{v}=\frac{f'_{z_0}}{w}=\frac{f'_{t_0}}{\rho}=-\lambda,$$

en désignant par $-\lambda$ la valeur commune de ces rapports.

Revenons maintenant à la forme explicite et nous obtenons les égalités :

$$(1)\quad\begin{cases}Ax_0+B''y_0+B'z_0+Ct_0+u\lambda=0,\\ B''x_0+A'y_0+Bz_0+C't_0+v\lambda=0,\\ B'x_0+By_0+A''z_0+C''t_0+w\lambda=0,\\ Cx_0+C'y_0+C''z_0+Dt_0+\rho\lambda=0;\end{cases}$$

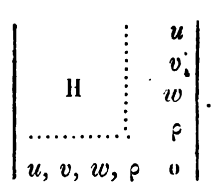
auxquelles il faut adjoindre la suivante :

$$f(x_0, y_0, z_0, t_0)=0.$$

Multiplions ces relations, respectivement, par x_0, y_0, z_0, t_0 et -1, puis ajoutons les résultats obtenus, nous avons

$$(2)\quad ux_0+vy_0+wz_0+\rho t_0=0.$$

Si entre (1) et (2) nous éliminons x_0, y_0, z_0, t_0 et λ, il vient



C'est l'équation générale des quadriques dans le système des coordonnées tangentielles.

EXERCICES

1. *Démontrer que si les équations d'une courbe gauche peuvent se mettre sous la forme :*

$$\frac{x}{u(\theta)}=\frac{y}{v(\theta)}=\frac{z}{w(\theta)}=\frac{t}{\rho(\theta)}$$

le plan osculateur au point M, (x, y, z, t), *a pour équation*

$$(1)\quad \begin{vmatrix} X & Y & Z & T \\ u & v & w & \rho \\ u' & v' & w' & \rho' \\ u'' & v'' & w'' & \rho'' \end{vmatrix} = 0.$$

On appelle **plan osculateur** en un point M d'une courbe U un plan P qui passe par ce point et qui rencontre U en un certain nombre de points, parmi lesquels trois coïncident avec M.

Le plan osculateur étant représenté par

$$AX + BY + CZ + DT = 0,$$

l'équation suivante :

$$A.u(\theta) + B.v(\theta) + C.w(\theta) + D.\rho(\theta) = 0,$$

doit avoir une racine triple. On a donc

$$Au' + Bv' + Cw' + D\rho' = 0,$$

et,

$$Au'' + Bv'' + Cw'' + D\rho'' = 0.$$

De cette remarque on déduit l'égalité (1).

2. *Appelons, avec Monge,* **arête de rebroussement,** *le lieu des points communs à une caractéristique et à l'enveloppée voisine.*

On propose de démontrer :

1° *Que l'équation de l'arête de rebroussement s'obtient en éliminant* α *entre les équations :*

$$f = 0, \quad f'_{\alpha} = 0, \quad f''_{\alpha^2} = 0;$$

2° *Que chaque caractéristique est tangente à l'arête de rebroussement.*

3. *Trouver l'équation générale du plan tangent au point* M (x, y, z) *en exprimant que la section obtenue a, en* M, *un point double.*

On peut raisonner ainsi. Soit

$$Z - z = A(X - x) + B(Y - y)$$

l'équation cherchée. La projection de l'intersection sur le plan XOY admet un point double (le point x, y). D'ailleurs on peut considérer Z, comme une fonction d'X et d'Y et en écrivant que les dérivées partielles par rapport à X et Y, sont nulles pour $X = x$, $Y = y$, on a

$$f'_x + Z'_x f'_z = 0, \quad f'_y + Z'_y f'_z = 0;$$

ou

$$f'_x + Af'_z = 0, \quad f'_y + Bf'_z = 0.$$

On en déduit

$$A = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad B = -\frac{f'_y}{f'_z},$$

et, finalement, l'équation du plan tangent est

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y + (Z - z) f'_z = 0.$$

4. Plans réciproques. — Surface de Steiner. *On considère un tétraèdre* A,B,C,D, *et un plan* P *rencontrant les arêtes de ce tétraèdre en six points que nous représenterons par*

(AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD).

Considérons l'un d'eux, (AB) *par exemple, et prenons le symétrique de ce point par rapport au milieu du segment* AB. *Nous obtiendrons de la sorte six points*

(AB)′, (AC)′, (AD)′, (BC)′, (BD)′, (CD)′.

Ces six points sont évidemment situés dans un plan. Nous le désignerons par P′ *et nous dirons que les plans* P *et* P′ *sont* **réciproques** *pour rappeler que si* P′ *est le plan déduit de* P, *d'après la loi précédente ; réciproquement* P *est le plan qui correspond à* P′, *dans cette transformation.*

Ceci posé, on imagine que le plan P *tourne constamment autour d'un point fixe* M, *et l'on propose de démontrer que le plan réciproque enveloppe une surface du quatrième ordre et de la troisième classe.*

Cette remarquable surface, découverte par Steiner, jouit de la propriété singulière d'être coupée par un quelconque de ses plans tangents suivant deux coniques ; on propose de vérifier cette proposition.

Pour simplifier les calculs on pourra considérer d'abord le cas où le tétraèdre est régulier, le point M étant le centre de gravité de ce tétraèdre ; on obtiendra alors la surface de Steiner régulière. On vérifiera, et ceci est d'ailleurs une propriété de toutes les surfaces de Steiner, que la surface repose par quatre coniques doubles sur les faces du tétraèdre de reférence.

Nous signalerons aussi la présence sur cette surface de trois droites doubles. Si par M on mène une droite recontrant AB au point I et CD au point J, en prenant le point I′ symétrique de I par rapport au milieu de AB et de même J′ symétrique de J par rapport au milieu de CD ; I′J′ est une des droites dont nous voulons parler. A un plan passant par IJ correspond un plan réciproque passant par la droite fixe I′J′ ; tout point de I′ J′ est un point double de la surface.

Comme il y a trois droites passant par M et s'appuyant sur les arêtes opposées du tétraèdre, il existe trois droites doubles dans la surface de Steiner. Un plan tangent coupe la surface suivant une courbe du quatrième ordre ayant *quatre* points doubles. C'est pour ce motif qu'elle se décompose en deux coniques.

Dans le système tangentiel, l'équation de la surface de Steiner est

$$\frac{a}{u}+\frac{b}{v}+\frac{c}{w}+\frac{d}{\rho}=0\,;$$

Cette relation très remarquable est due à *M. Moutard.*

Dans le système des coordonnées tétraédrales, l'équation de la surface est

$$\sqrt{\mathrm{A}x}+\sqrt{\mathrm{B}y}+\sqrt{\mathrm{C}z}+\sqrt{\mathrm{D}t}=0.$$

Elle représente un cas particulier des surfaces que *De la Gournerie* a nommées *surfaces tétraédales symétriques simples.*

5. *On considère un tétraèdre* ABCD *et deux points* M *et* M′. *Par la droite* MM′ *on fait passer un plan* P, *trouver l'enveloppe des plans réciproques* P′.

Cette surface Σ, qui appartient au genre des *surfaces développables* [1], est

1. Les surfaces réglées, c'est-à-dire celles qui sont engendrées par le mouvement d'une droite, sont de deux espèces : les *surfaces gauches* et les *surfaces développables.*

On distingue ces deux genres en cherchant si deux génératrices infiniment voisines ont, ou non, un point commun. Lorsque l'équation d'un plan ne renferme qu'un seul paramètre variable, ce plan enveloppe une surface développable.

En effet, les intersections successives sont, comme nous l'avons indiqué, tangentes à une courbe que nous avons nommée arête de rebroussement (ex. 2); et, lorsqu'une droite Δ se meut en restant tangente à une courbe gauche U, le lieu décrit par Δ est une surface développable.

Pour le démontrer, considérons deux points A et B sur la courbe U et les tangentes correspondantes Δ et Δ′. Lorsque le point B se rapproche indéfiniment de A, la droite AB a pour position limite, la droite Δ, et le plan (AB, Δ′) devient alors un plan dont la position est bien déterminée ; c'est le plan osculateur au point A. Les deux droites Δ et Δ′ sont donc, à la limite, situées dans un plan bien déterminé ; c'est ce fait qu'on traduit en disant que Δ et Δ′ ont, à la limite, un point commun.

l'enveloppe de toutes les surfaces de Steiner qui correspond aux différents points de MM′ ; elle est du quatrième ordre. En considérant parmi ceux-ci les deux points μ, μ' qui appartiennent aux plans ABC, ABD, on voit que les plans P passant constamment par μ donnent sur ABC des droites Δ qui tournent autour de μ. Par suite, les transversales réciproques Δ' enveloppent une conique inscrite à ABC (*G. plane ;* p. 509). Cette remarque s'applique au point μ' et l'on voit que la développable circonscrite à deux surfaces de Steiner peut être engendrée de la manière suivante :

On donne deux plans ABC, ABD *et dans chacun d'eux deux coniques* γ *et* γ' *tangentes à la droite* AB ; *par un point* M *mobile sur* AB *on mène à* γ *et à* γ' *des tangentes* MT, M′T′ ; *le lieu décrit par les droites* TT′ *est la développable* Σ.

6. *Trouver l'équation de l'***Héliçoïde développable**, *surface qui est engendrée par les tangentes à l'Hélice.*

En prenant l'axe du cylindre pour axe OZ, une droite rencontrant l'Hélice pour axe OX, et une perpendiculaire au plan YOZ pour axe OY, les équations de l'Hélice sont

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad \frac{y}{R} = \sin\frac{2\pi z}{l} ;$$

R désignant le rayon de base du cylindre, et l la longueur du *pas* de l'Hélice.

On trouvera que l'équation de l'Helicoïde développable est

$$2\pi\frac{z}{l} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2} - 1} = \text{arc tg}\,\frac{xy + R\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{R^2 - y^2}.$$

NEUVIÈME LEÇON

GÉNÉRATION DES SURFACES

Nous nous proposons maintenant de chercher les formes générales affectées par les équations de quelques familles de surfaces remarquables; telles sont les *cylindres*, les *cônes*, les *conoïdes*, et les *surfaces de révolution* qui vont nous occuper dans cette leçon.

109. Surfaces cylindriques. (*Équation générale.*) Soient

$$(1) \quad R=0, \quad T=0,$$

les équations d'une droite fixe OA. Imaginons qu'une droite GH, parallèle à OA, se transporte en s'appuyant constamment sur la courbe G qui a pour équations

$$(2) \quad U=0, \quad V=0.$$

Les équations de la génératrice GH sont

$$(3) \quad R=\alpha, \quad T=\beta;$$

α, β, désignant des paramètres arbitraires.

Les égalités (2) et (3) sont vérifiées par les coordonnées du point G; si nous éliminons $x,y,z,$ entre ces équations nous trouverons que les paramètres α, β, vérifient constamment une certaine relation que nous représenterons par

$$(4) \quad f(\alpha, \beta)=0.$$

Pour avoir le lieu décrit par GH, il reste à éliminer α et β entre (3) et (4). L'équation de la surface cylindrique est donc

$$(A) \quad f(R, T)=0.$$

Le premier membre de l'équation d'un cylindre présente donc cette propriété remarquable d'être *une fonction de deux formes linéaires.*

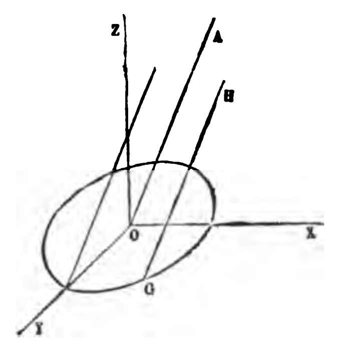


Fig. 13.

Ce fait algébrique est caractéristique des surfaces cylindriques; c'est ce que nous allons montrer.

110. Théorème. *Lorsque l'équation d'une surface* Σ *peut se mettre sous la forme*

$$(1) \quad f(R, T) = 0,$$

R, T, *désignant des formes linéaires; cette surface est un cylindre.*

Considérons l'équation indéterminée

$$(1') \quad f(\alpha, \beta) = 0,$$

laquelle, en général, admet une infinité de solutions; soit (α', β') l'une de ces solutions. Prenons maintenant la droite Δ qui a pour équations

$$(2) \quad R = \alpha', \quad T = \beta';$$

si nous cherchons l'intersection de Δ et de Σ', il faut résoudre les équations (1) et (2) qui, par combinaison, donnent

$$f(\alpha', \beta') = 0,$$

égalité qui est vérifiée, par hypothèse. Ainsi les trois équa-

tions (1) et (2) se réduisent à deux, la droite Δ rencontre donc Σ en un nombre infini de points ; en d'autres termes, Δ est située sur Σ.

Si nous imaginons maintenant toutes les solutions de (1′) et les droites Δ correspondantes, en prenant une courbe U qui les rencontre toutes, on pourra considérer Σ comme une surface engendrée par une droite Δ qui est constamment parallèle à la droite fixe qui a pour équations

$$R = 0, \quad T = 0 ;$$

ainsi, la surface Σ est un cylindre.

D'ailleurs, et c'est une remarque qu'il importe de faire, tous les points de Σ ont été obtenus par le procédé que nous venons d'exposer. En effet, soit M_0 un point de Σ, on a :

$$f(R_0, T_0) = 0.$$

Parmi les solutions de (1′) on doit donc trouver

$$\alpha = R_0, \quad \beta = T_0 ;$$

par conséquent, la droite Δ_0 qui correspond à cette solution, droite qui a pour équations

$$R = R_0, \quad T = T_0,$$

passe par M_0 ; ce point a donc été obtenu par la construction indiquée pour les droites Δ_0.

111. Théorème. *Le plan tangent au cylindre est le même, pour tous les points d'une génératrice donnée.*

Soit

$$f(R, T) = 0,$$

l'équation du cylindre proposé et soient (x_0, y_0, z_0, t_0) les coordonnées d'un point M_0 pris sur une génératrice Δ.

Les équations d'une génératrice quelconque étant :

$$R = \lambda, \quad T = \mu,$$

celles de Δ sont donc,

$$(1)\quad R = R_0, \quad T = T_0.$$

Prenons maintenant, sur Δ, un second point M_1 (x_1, y_1, z_1, t_1) ; les plans tangents aux points M_0 et M_1, ont pour équation, respectivement,

$$(2)\quad Rf'_{R_0} + Tf'_{T_0} = 0, \quad Rf'_{R_1} + Tf'_{T_1} = 0.$$

D'ailleurs, le point M étant situé sur Δ, ses coordonnées vérifient les égalités (1), et nous avons :

$$R_1 = R_0, \quad \text{et} \quad T_1 = T_0.$$

Ainsi, les équations (2) sont identiques.

112. Surfaces coniques. *Équation générale.* La surface conique est déterminée par le mouvement d'une droite Δ, s'appuyant constamment sur une courbe U et passant par un point fixe S (x_0, y_0, z_0), appelé sommet du cône.

Le point S peut être considéré comme le pcint commun aux plans qui ont pour équation, respectivement,

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0.$$

Les équations de Δ sont donc :

$$(1)\quad \frac{P - P_0}{\alpha} = \frac{Q - Q_0}{\beta} = \frac{R - R_0}{\gamma},$$

α, β, γ, désignant des paramètres variables. En éliminant x, y, z, entre ces équations et celles de U on obtiendra entre α, β, γ, une certaine relation

$$(3)\quad f(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

qui est, nécessairement, homogène en α, β, γ, puisque les égalités (1) sont homogènes par rapport à ces lettres.

Les équations (1) et (2) prouvent que le lieu décrit par Δ a pour équation

$$(3)\quad f(P - P_0, \quad Q - Q_0, \quad R - R_0) = 0.$$

En posant :

$$P - P_0 = U, \quad Q - Q_0 = V, \quad R - R_0 = W,$$

l'équation (3) devient :

$$\text{(B)} \quad f(U, V, W) = 0,$$

f désignant une forme homogène des lettres U,V,W.

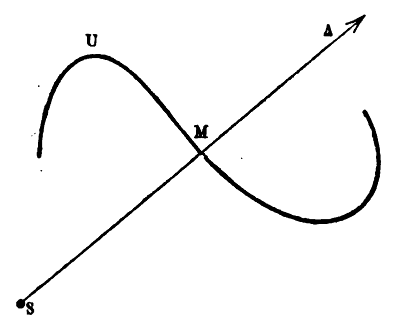


Fig. 14.

Cette propriété est caractéristique des surfaces coniques. C'est ce que nous démontrons dans le paragraphe suivant.

113. Théorème. *Si les équations*

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

représentent trois plans ayant un seul point commun S, *point situé à distance finie, et si* f (U,V,W) *est une forme homogène des lettres* U,V,W, *l'équation*

$$(\Sigma) \quad f(U, V, W) = 0$$

représente un cône ayant pour sommet S.

Désignons par α, β, γ une solution de l'équation (Σ) et considérons la droite Δ qui a pour équations.

$$\frac{U}{\alpha} = \frac{V}{\beta} = \frac{W}{\gamma}.$$

Cette droite passe par S et elle est située tout entière, sur la surface (Σ), puisque nous supposons

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Si nous imaginons toutes les solutions de l'équation (1) et les droites Δ qui leur correspondent, si nous traçons ensuite, sur la surface considérée Σ, une courbe Δ rencontrant toutes ces droites, nous pourrons dire que Σ est engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur une courbe donnée ; en d'autres termes, Σ est une surface conique.

On voit d'ailleurs, en reproduisant le raisonnement que nous avons donné plus haut (§ 110), que tous les points de Σ peuvent être obtenus par la génération précédente.

114. Théorème. *Le plan tangent à une surface conique, est le même pour tous les points d'une même génératrice* G.

Prenons, sur la génératrice G qui a pour équations

$$\frac{U}{\alpha} = \frac{V}{\beta} = \frac{W}{\gamma},$$

deux points M_0, M_1.

Les équations

$$(1) \quad Uf'_{U_0} + Vf'_{V_0} + Wf'_{W_0} = 0, \quad Uf'_{U_1} + Vf'_{V_1} + Wf'_{W_1} = 0,$$

représentent les plans tangents correspondants. Nous avons, d'ailleurs,

$$\frac{U_0}{\alpha} = \frac{V_0}{\beta} = \frac{W_0}{\gamma}, \quad \text{et} \quad \frac{U_1}{\alpha} = \frac{V_1}{\beta} = \frac{W_1}{\gamma};$$

par suite,

$$(2) \quad \frac{U_0}{U_1} = \frac{V_0}{V_1} = \frac{W_0}{W_1}.$$

Mais $f(U,V,W)$, représentant une forme homogène, les équations (1) sont aussi homogènes : la première par rapport à U_0, V_0, W_0 ; l'autre par rapport à U_1, V_1, W_1. Ainsi, et en vertu des égalités (2), les deux équations sont identiques.

115. Remarque. Les formes linéaires U,V,W que nous avons considérées plus haut (§ 112) sont homogènes par rapport aux binômes :

$$x - x_0, \quad y - y_0, \quad z - z_0;$$

l'équation (B), du paragraphe cité, est donc aussi homogène par rapport à ces binômes. Ainsi *l'équation d'une surface conique est homogène par rapport aux binômes* $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$; *(x_0, y_0, z_0) représentant les coordonnées du sommet.*

La réciproque est vraie et elle peut être considérée comme démontrée par le théorème plus général, établi au paragraphe précédent.

116. Définition des Conoïdes. *Lorsqu'une droite mobile* G *est assujettie aux conditions suivantes:*

1° *De rencontrer toujours une droite fixe* Δ, *nommée* **Axe,**

2° *D'être constamment parallèle à un plan donné* P, *dit* **plan directeur,**

3° *De s'appuyer sur une courbe donnée* γ, *appelée* **directrice ;**

la droite G *engendre un* **Conoïde.**

Lorsque l'axe est perpendiculaire sur le plan directeur, on dit que *le conoïde est droit;* il est *oblique,* dans l'hypothèse contraire.

Dans certains cas, la génératrice G, au lieu de rencontrer une courbe γ, reste tangente à une surface σ; comme le point de contact de G et de σ décrit, sur cette surface, une certaine courbe que l'on peut prendre pour directrice, on voit que ces deux modes de génération des conoïdes rentrent l'un dans l'autre.

117. Théorème. *L'équation générale des conoïdes est*

$$\text{(C)} \quad f\left(P, \frac{U}{V}\right) = 0;$$

P,U,V, *désignant des formes linéaires. La réciproque est vraie; toute équation de la forme* (1) *représente un conoïde.*

En effet, la droite G étant parallèle au plan directeur, l'une de ses équations est

$$(1) \quad P = \alpha,$$

$P = 0$ étant celle du plan directeur. D'autre part, les équations de l'axe étant

$$U = 0, \quad V = 0,$$

la droite G est située dans un plan passant par l'axe et dont l'équation peut être représentée par

$$(2) \quad U = \beta V.$$

En exprimant que la droite qui correspond aux équations (1) et (2) rencontre la directrice, on obtient, entre les paramètres variables α, β, une certaine relation

$$f(\alpha, \beta) = 0.$$

Le lieu décrit par G est donc la surface qui a pour équation

$$f\left(P, \frac{U}{V}\right) = 0.$$

Réciproquement, toute équation de ce genre représente un conoïde. Prenons, en effet, une solution particulière α', β', de l'équation

$$f(\alpha, \beta) = 0,$$

et considérons la droite G qui a pour équation

$$P = \alpha', \quad \frac{U}{V} = \beta';$$

G est située, tout entière, sur la surface considérée, puisque $f(\alpha', \beta') = 0$. De plus, on voit que G, dans son mouvement, reste parallèle au plan qui a pour équation $P = 0$, et rencontre constamment la droite qui correspond aux équations $U = 0$, $V = 0$. En traçant, sur la surface (C), une

courbe rencontrant toutes les droites G, on voit finalement que cette surface est un conoïde.

118. Surfaces de révolution. *Equation générale.* On sait qu'une surface de révolution Σ est engendrée par la rotation d'une courbe U, plane ou gauche, autour d'une droite fixe Δ, nommée *axe* de la surface. Tout point M, pris sur U, engendre un cercle ayant son centre sur Δ, ces cercles sont les *parallèles* de Σ; enfin, les sections obtenues par des plans passant par l'axe sont des courbes égales, dites *méridiennes*.

Prenons sur l'axe un point $O'(x_0, y_0, z_0)$; et soient

$$(\Delta) \quad \frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma},$$

les équations de cette droite. Le parallèle MM' peut être considéré comme étant obtenu en coupant la sphère de centre O',

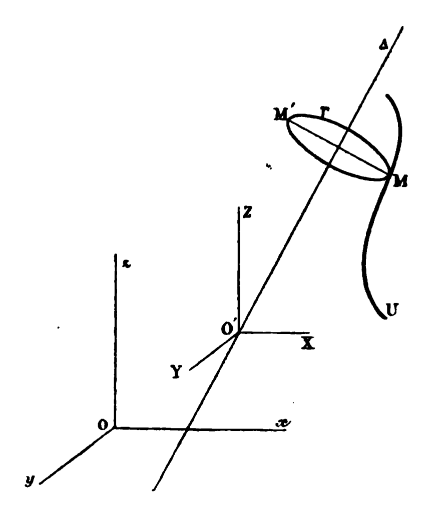


Fig. 15.

et de rayon O'M, par un plan, passant par M, perpendiculairement à Δ. Les équations du parallèle Γ sont donc :

$$S = (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2+2(y-y_0)(z-z_0)\cos\lambda + 2(z-z_0)(x-x_0)\cos\mu+2(x-x_0)(y-y_0)\cos\nu = t,$$

et $$P = \alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=\theta.$$

Les coordonnées de M vérifient, à la fois, ces deux équations et celles de la courbe U. En éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on obtiendra, entre les paramètres variables (t, θ), une certaine relation que nous représenterons par

$$f(t, \theta) = 0,$$

Ainsi, le lieu décrit par Γ est une surface qui a pour équation

$$f(S, P) = 0,$$

les formes S et P ayant la signification indiquee.

119. Théorème. *Lorsque l'équation d'une surface Σ peut se mettre sous la forme suivante :*

$$f(S, P) = 0,$$

S *représentant le premier membre de l'équation d'une sphère, dans le système d'axes qu'on a choisi ; P étant une forme linéaire, cette surface Σ est de révolution; et les équations de l'axe s'obtiennent en abaissant du centre de la sphère* ($S = 0$), *une perpendiculaire sur le plan* ($P = 0$).

En effet, soit (α', β') une solution particulière de l'équation

$$(1) \quad f(\alpha, \beta) = 0.$$

Considérons le cercle Γ qui correspond aux équations

$$(2) \quad S = \alpha', \quad (3) \quad P = \beta';$$

Γ est situé tout entier sur Σ, puisque $f(\alpha', \beta') = 0$. Le centre de Γ s'obtient d'ailleurs en abaissant du point O', centre de la sphère (2), une perpendiculaire Δ sur le plan (3). Cette droite Δ est fixe, quand α' et β' varient; et si l'on imagine une courbe U rencontrant tous les cercles tels que Γ, qui correspondent aux solutions de (1), on pourra dire que Σ est engendrée par la rotation de U autour de Δ. La surface Σ est donc de révolution.

120. Théorème. *Le plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire sur le plan méridien qui passe par le point de contact.*

Prenons des axes rectangulaires, ayant pour origine le point O′ de l'axe Δ (fig. 15). L'équation de Σ est alors

$$f(X^2 + Y^2 + Z^2, AX + BY + CZ) = 0,$$

ou

$$f(s, p) = 0,$$

en posant

$$(1) \quad s = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \text{et} \quad (2) \; p = AX + BY + CZ.$$

Soient ξ, η, ζ, les coordonnées du point M, dans le système (O′, XYZ.) L'équation

$$(X - \xi) f'_\xi + (Y - \eta) f'_\eta + (Z - \zeta) f'_\zeta = 0,$$

représente le plan tangent au point M. On a, d'ailleurs,

$$f'_X = 2Xf'_s + Af'_p,$$
$$f'_Y = 2Yf'_s + Bf'_p,$$
$$f'_Z = 2Zf'_s + Cf'_p;$$

et l'équation précédente devient :

$$(3) \quad (X - \xi)(2\xi f'_s + Af'_p) + (Y - \eta)(2\eta f'_s + Bf'_p) + (Z - \xi)(2\zeta f'_s + Cf'_p) = 0.$$

D'autre part, les équations de l'axe s'obtiennent en abaissant, du centre de la sphère (1), une perpendiculaire sur le plan (2); par conséquent, les équations de Δ sont

$$\frac{X}{A} = \frac{Y}{B} = \frac{Z}{C}.$$

Le plan qui passe par Δ, et par le point M, a pour équation

$$(4) \quad \frac{X}{A}\left(\frac{\eta}{B} - \frac{\zeta}{C}\right) + \frac{Y}{B}\left(\frac{\zeta}{C} - \frac{\xi}{A}\right) + \frac{Z}{C}\left(\frac{\xi}{A} - \frac{\eta}{B}\right) = 0,$$

et pour démontrer que les plans (3) et (4) sont rectangulaires, il suffit de vérifier l'identité évidente

$$\left(2\xi f'_s + A f'_p\right)(C\eta - B\zeta) + \left(2\eta f'_s + B f'_p\right)(A\zeta - C\xi)$$
$$+ \left(2\zeta f'_s + C f'_p\right)(B\xi - A\eta) \equiv 0.$$

121. Corollaire. *La normale, en un point arbitrairement choisi sur une surface de révolution, rencontre l'axe.*

Cette propriété qui peut s'établir directement, et très simplement, en prenant l'axe de la surface pour l'un des axes de coordonnées, est la conséquence géométrique immédiate du théorème précédent.

Si l'on observe qu'une surface de révolution peut toujours être engendrée par la rotation d'une méridienne autour de l'axe, on voit que *les plans tangents à une surface de révolution, le long d'un parallèle donné, vont passer par un même point, situé sur l'axe.*

On déduit encore de cette remarque, et du corollaire I, que *les normales à une surface de révolution le long d'un parallèle donné, coupent l'axe de la surface au même point.*

122. Condition pour qu'une quadrique soit de révolution. Lorsqu'une surface du second ordre est de révolution, son équation étant une fonction de la forme sphérique S et de la forme linéaire P, on a

$$Q \equiv \mathbf{S} S + 6 P^2,$$

et, par suite, si les axes sont rectangulaires,

$$\varphi_1(x,y,z) - \mathbf{S}(x^2 + y^2 + z^2) \equiv 6\,(mx + ny + pz)^2,$$

Cette identité est caractéristique des surfaces du second ordre de révolution; elle sert de base aux développements qui suivent.

La forme quadratique

$$(1) \quad \varphi_1(x, y, z) - \mathbf{S}(x^2 + y^2 + z^2),$$

étant un carré parfait, nous avons démontré en algèbre (§ 353)

que tous les mineurs du discriminant sont nuls. Le discriminant de la forme (1) est

$$\Delta(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} A-\mathbf{S} & B'' & B' \\ B'' & A'-\mathbf{S} & B \\ B' & B & A''-\mathbf{S} \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on a

$$(2)\quad \begin{aligned} B\,(A-\mathbf{S}) &= B'B'', \\ B'\,(A'-\mathbf{S}) &= BB'', \\ B''\,(A''-\mathbf{S}) &= BB'\,; \end{aligned} \qquad (3)\quad \begin{aligned} (A-\mathbf{S})(A'-\mathbf{S}) &= B''^2, \\ (A'-\mathbf{S})(A''-\mathbf{S}) &= B^2, \\ (A''-\mathbf{S})(A-\mathbf{S}) &= B'^2. \end{aligned}$$

On doit ici distinguer deux cas, suivant que le produit $BB'B''$ est nul, ou différent de zéro.

1er Cas. Si l'on suppose d'abord $BB'B'' \neq 0$, les égalités (2) donnent

$$\mathbf{S} = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

D'ailleurs, si ces relations sont vérifiées, les égalités (3) le sont aussi.

Les nombres :

$$\alpha = A - \frac{B'B''}{B}, \quad \alpha' = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad \alpha'' = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

se rencontrent dans un grand nombre de questions relatives à l'analyse des quadriques; pour une raison que nous donnons plus loin, nous les appellerons *nombres de Jacobi.*

Ceci posé, on peut énoncer la propriété suivante :

Dans le cas général, pour qu'une surface du second ordre soit de révolution, il est nécessaire et suffisant que les nombres de Jacobi soient égaux.

2e Cas. Supposons maintenant que le produit $BB'B''$ soit nul, et soit B'' le facteur qui est égal à zéro.

Les égalités (2) et (3) deviennent

$$\begin{aligned} B(A-\mathbf{S}) &= 0, \\ B'(A'-\mathbf{S}) &= 0, \\ BB' &= 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (A-\mathbf{S})(A'-\mathbf{S}) &= 0, \\ (A'-\mathbf{S})(A''-\mathbf{S}) &= B^2, \\ (A''-\mathbf{S})(A-\mathbf{S}) &= B'^2, \end{aligned}$$

Le produit BB' étant nul, il est nécessaire que l'un des facteurs soit nul; supposons $B' = 0$. Les égalités précédentes se réduisent, et donnent

$$B(A - S) = 0, \qquad (A - S)(A' - S) = 0,$$
$$(A' - S)(A'' - S) = B^2,$$
$$(A'' - S)(A - S) = 0.$$

La première prouve que l'on doit faire l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

$$1^\circ \quad B \neq 0, \qquad A = S;$$
$$2^\circ \quad B = 0, \qquad A \neq S;$$
$$3^\circ \quad B = 0, \qquad A = S.$$

Dans ces différents cas. on trouve

$$1^\circ \quad B^2 = (A' - A)(A'' - A),$$
$$2^\circ \quad A' = A'',$$
$$3^\circ \quad A = A', \quad \text{ou} \quad A = A''.$$

En résumé, *lorsqu'une surface du second ordre est de révolution, si son équation ne renferme pas l'un des termes :*

$$2Byz, \qquad 2B'zx, \qquad 2B''xy,$$

il est nécessaire que deux des coefficients B, B', B'' *soient nuls; ou qu'ils soient nuls tous les trois, simultanément.*

Dans le premier cas, si l'on suppose :

$$B' = 0, \qquad B'' = 0, \quad \text{et} \quad B \neq 0,$$

la quadrique est de révolution, si l'on a

$$B^2 = (A' - A)(A'' - A).$$

Dans le second cas, les coefficients B, B', B'' *étant nuls, la surface est de révolution, si deux des coefficients* A, A', A'', *sont égaux.*

123. Problème. *Une quadrique étant de révolution, trouver les équations de l'axe de la surface.*

1° Considérons d'abord le cas général et supposons $BB'B'' \neq 0$. En posant, comme nous l'avons fait,

$$\mathbf{S} = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{BB''}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

l'équation de la surface prend la forme

$$\mathbf{S}(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D + BB'B''\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right)^2 = 0.$$

Les équations de l'axe sont donc (§ 119),

$$\text{(A)} \quad B\left(x + \frac{C}{\mathbf{S}}\right) = B'\left(y + \frac{C'}{\mathbf{S}}\right) = B''\left(z + \frac{C''}{\mathbf{S}}\right).$$

2° Si nous supposons maintenant que nous ayons

$$B' = 0, \quad B'' = 0, \quad \text{et} \quad B^2 = (A - A')(A - A'');$$

l'équation de la surface peut s'écrire

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + (A' - A)y^2 + (A'' - A)z^2 + 2Byz = 0,$$

ou, encore,

$$A(x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + \frac{1}{A' - A}\left\{(A' - A)y + Bz\right\}^2 = 0.$$

Les équations de l'axe sont, dans ce cas,

$$\text{(A')} \quad Ax + C = 0, \quad B(Ay + C') = (A' - A)(Az + C'').$$

3° Quant au cas où l'on suppose

$$B = B' = B'' = 0, \quad \text{et} \quad A' = A'',$$

les équations de l'axe sont, évidemment,

$$A'y + C' = 0, \quad A'z + C'' = 0.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que la surface qui correspond à l'équation*

$$f(x+y+z, xy+xz+yz, x^2+y^2+z^2)=0,$$

est de révolution.

On posera

$$P = x+y+z, \qquad S = x^2+y^2+z^2, \qquad C = xy+xz+yz,$$

et l'on observera que

$$P^2 - 2C = S.$$

L'équation proposée est donc

$$f\left(P, \frac{P^2-2S}{2}, S\right)=0.$$

2. *Démontrer que l'équation*

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=h(x^2+y^2+z^2),$$

représente une surface de révolution.

On remarquera que le premier membre est identique à

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz),$$

et on appliquera la propriété démontrée dans l'exercice précédent.

3. *Reconnaître que l'équation*

$$xyz+(x+y)(y+z)(z+x)=1,$$

représente une surface de révolution.

4. *Démontrer que l'équation*

$$(b^2+c^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-2bcyz-2acxz$$
$$-2abxy=d^2(a^2+b^2+c^2),$$

représente un cylindre de révolution qui est tangent à la sphère qui correspond à l'équation

$$x^2+y^2+z^2=d^2,$$

en tous les points qui leur sont communs.

On écrit l'équation proposée sous les deux formes

$$(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2=d^2(a^2+b^2+c^2),$$

ou,

$$(x^2+y^2+z^2-d^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2.$$

5. *Équation générale des cônes de révolution :*

x_0 y_0 z_0 désignant les coordonnées du sommet S,
α, β, γ les paramètres directeurs de l'axe Δ,
2θ l'angle au sommet.

On considère le plan P qui passe par S perpendiculairement à Δ et l'on écrit que, pour tout point M pris sur le cône, le rapport entre la distance de M à P et la longueur MS est égale à $\cos\theta$.

Le résultat est

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}\cos^2\theta$$
$$=\left\{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\right\}^2.$$

6. *Equation générale des cylindres circulaires droits.*

On écrit que la distance d'un point de la surface à l'axe est égale au rayon.

On trouve, ainsi,

$$R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-\frac{\left\{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)+\gamma(z-z_0)\right\}^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

On applique ensuite l'identité de Lagrange. On suppose, d'ailleurs, que les équations de l'axe sont

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}.$$

7. *On suppose que α, β, γ représentent les angles formés par une droite avec les axes de coordonnées, et l'on demande ce que représente l'équation*

$$2x^2+2y^2+2z^2-(x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma)^2=0.$$

On observe que

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2,$$

et on applique l'identité de Lagrange.

8. *Lorsque (les axes étant supposés rectangulaires) l'équation d'une quadrique est symétrique par rapport aux lettres x, y, z, cette surface est évidemment de révolution autour de la droite qui a pour équation*

$$x=y=z;$$

démontrer que cette propriété subsiste, pour des axes obliques, quand les faces du trièdre des coordonnées sont égales.

Dans le cas des axes rectangulaires, si l'équation de la surface est

$$(1) \quad A(x^2+y^2+z^2)+2B(yz+zx+xy)=H$$

les nombres de Jacobi sont évidemment égaux, et la surface est de révolution. On peut aussi appliquer la remarque faite à l'exercice 1.

Dans le cas des axes obliques, et en supposant $\lambda=\mu=\nu$, après avoir posé

$$S=x^2+y^2+z^2+2\cos\lambda\,(xy+xz+yz),$$

et

$$P=x+y+z,$$

on remarque que l'on a

$$P^2-S=4\sin^2\frac{\lambda}{2}(xy+xz+yz),$$

et que l'équation (1) peut s'écrire :

$$A\,.\,S+\frac{B-\cos\lambda}{2\sin^2\frac{\lambda}{2}}(P^2-S)=H.$$

L'équation proposée est une fonction des formes P et S, elle représente donc une surface de révolution.

9. Théorème de Villarceau. *Démontrer que si l'on fait tourner une ellipse γ autour d'une droite Δ située dans son plan, le plan bi-tangent coupe la surface ainsi obtenue suivant deux ellipses.*

Imaginons l'ellipse γ' qui n'est autre chose que γ, quand celle-ci a tourné de 180° ; menons à γ et à γ' deux tangentes intérieures Δ', Δ'' qui se coupent en O sur Δ.

Prenons O pour origine ; Δ pour axe oz ; la seconde bissectrice de Δ' et de Δ'', pour axe ox ; enfin une normale aux droites ox, oz, pour axe oy.

L'équation de γ est

$$z^2-m^2x^2+(\alpha x+\beta z+h)^2=0,$$

et celle du Tore elliptique,

$$z^2-m^2(x^2+y^2)+\left\{\alpha\sqrt{x^2+y^2}+\beta z+h\right\}^2=0.$$

En coupant cette surface par un plan bi-tangent, plan qui correspond à l'équation

$$z=mx.$$

on voit que la section obtenue se compose de deux ellipses qui se pro-

jettent sur le plan xoy suivant deux autres ellipses ayant pour foyer commun le point O.

On examinera aussi le cas particulier où l'ellipse γ est remplacée par un cercle et l'on vérifiera que la section obtenue par le plan bi-tangent est un système de deux circonférences.



DEUXIÈME LIVRE

LES QUADRIQUES D'APRÈS LEUR ÉQUATION GÉNÉRALE

DIXIÈME LEÇON

ÉTUDE ANALYTIQUE DU CENTRE. — DISTINCTION DES QUADRIQUES EN CINQ CLASSES

124. Définition du centre. On dit qu'un point C est un centre d'une surface Σ, lorsque toute transversale D passant par C rencontre Σ en des points qui sont, deux à deux, placés symétriquement par rapport à C.

Sans entrer dans des considérations générales qui ont la plus grande analogie avec celles que nous avons développées dans la géométrie plane, nous nous bornerons à rechercher dans quel cas les quadriques admettent un ou plusieurs centres; nous déduirons de cette étude une première classification des surfaces du second ordre.

125. Théorème. *Lorsque le discriminant Δ de la forme ternaire $\varphi_2(x, y, z)$* [1] *est différent de zéro :* 1° *la quadrique* Q *qui correspond à l'équation $f(x, y, z) = 0$,*

$$f(x,y,z) = \varphi_2(x,y,z) + \varphi_1(x,y,z) + \varphi_0,$$

a un centre unique, à distance finie.

(1) La fonction $\varphi_2(x, y, z)$ revient fréquemment, dans l'étude des quadriques; pour éviter la complication de l'écriture nous convenons ici de la représenter le plus souvent par la lettre φ.

2° *Les coordonnées de ce point sont données par les équations*

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0;$$

qui admettent une solution unique et finie.

Considérons un point M_0 dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0, et soient

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

les équations d'une droite D passant par ce point. Pour déterminer les points communs à D et à Q nous devons résoudre l'équation

$$f(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho, z_0 + \gamma\rho) = 0,$$

qui peut s'écrire

$$f(x_0, y_0, z_0) + \rho\left(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}\right) + \rho^2\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Pour que le point M_0 soit un centre de Q, il est nécessaire et suffisant que l'on ait, quels que soient α, β, γ,

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0,$$

et, par conséquent,

$$(\gamma) \quad f'_{x_0} = 0, \quad f'_{y_0} = 0, \quad f'_{z_0} = 0.$$

Réciproquement, s'il existe un point dont les coordonnées vérifient les équations

$$(\gamma') \quad f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

ce point est un centre de la quadrique considérée.

D'ailleurs, les équations

$$(\gamma') \quad \begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' &= 0, \end{aligned}$$

admettent une solution unique et finie, si l'on suppose

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

le théorème énoncé se trouve donc démontré.

126. Théorème. *Lorsqu'on transporte les axes de coordonnées au centre d'un quadrique :*

1° *les termes du second degré restent les mêmes ;*
2° *les termes du premier degré disparaissent ;*
3° *la nouvelle constante* D_1 *se calcule par l'égalité*

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

Le déterminant Δ n'étant pas nul, désignons par x_0, y_0, z_0, la solution des équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0.$$

Si nous transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point M_0, les formules de transformation sont

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y, \quad z = z_0 + Z,$$

et l'équation de la quadrique, dans le nouveau système, est

$$f(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = 0,$$

ou

$$f(x_0, y_0, z_0) + Xf'_{x_0} + Yf'_{y_0} + Zf'_{z_0} + \varphi_2(X, Y, Z) = 0.$$

Les coefficients des termes en X, Y, Z, sont nuls, d'après les relations (C), et la nouvelle équation est

$$\varphi_2(X, Y, Z) + D_1 = 0,$$

en posant,

$$D_1 = f(x_0, y_0, z_0).$$

Nous voyons déjà que les termes du second degré n'ont pas été modifiés et que ceux du premier degré ont disparu. Il nous reste à calculer D_1.

A cet effet, considérons les égalités

$$(1)\quad \begin{aligned} Ax_0 + B''y_0 + B'z_0 + C &= 0, \\ B''x_0 + A'y_0 + Bz_0 + C' &= 0, \\ B'x_0 + By_0 + A''z_0 + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions-les, respectivement, par x_0, y_0, z_0, puis ajoutons les résultats obtenus; nous avons

$$f(x_0, y_0, z_0) - Cx_0 - C'y_0 - C''z_0 - D = 0,$$

ou

$$(2)\quad Cx_0 + C'y_0 + C''z_0 + D - D_1 = 0.$$

En éliminant x_0, y_0, z_0, entre (1) et (2) il vient, finalement,

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D - D_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, par une transformation évidente,

$$H - D_1 \Delta = 0.$$

127. Distinction des quadriques en cinq classes. Les équations

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

représentent trois plans que, pour la commodité du langage, nous nommerons les **plans du centre**.

Ces plans peuvent affecter des situations relatives diffé-

rentes qui sont, sans exclusion, résumées dans le tableau suivant.

1°	Les plans du centre forment un véritable trièdre.	*Un centre unique, à distance finie.* (**1re Classe.**)
2°	Les plans du centre sont parallèles à une droite et forment une figure prismatique, ou bien deux plans du centre sont parallèles, le troisième étant quelconque.	*Un centre unique rejeté à l'infini.* (**2e Classe.**)
3°	Les plans du centre passent par une même droite ; ou bien, deux plans sont confondus, le troisième étant quelconque.	*Une ligne de centres, à distance finie.* (**3e Classe.**)
4°	Les trois plans du centre sont parallèles.	*Une ligne de centres à l'infini.* (**4e Classe.**)
5°	Les trois plans du centre sont confondus.	*Un plan de centres, à distance finie.* (**5e Classe.**)

Cette propriété des quadriques d'avoir un ou plusieurs centres, à distance finie ou infinie, les divise, conformément au tableau précédent, en cinq classes. Il nous reste à montrer comment, au point de vue analytique, on reconnaît que la quadrique qui correspond à une équation donnée appartient à l'une ou à l'autre des classes que nous venons de créer.

Les surfaces de la première classe sont caractérisées par l'hypothèse $\Delta \not\gtrless 0$; nous allons chercher quelles sont les relations qui caractérisent les autres classes. Mais nous ferons ici, préalablement, une observation qui facilite la discussion suivante.

128. Remarque. *Si l'on considère le tableau rectangulaire.*

$$(U) \quad \left\| \begin{matrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \end{matrix} \right\|,$$

Δ' désignant un déterminant du troisième ordre pris dans ce tableau (et autre que Δ), si l'on suppose $\Delta = 0$, le hessien H de la surface est nul, ou différent de zéro, en même temps que Δ'

Soient, en effet,

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}, \quad \text{et} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} A & B'' & C \\ B'' & A' & C' \\ B' & B & C'' \end{vmatrix}.$$

D'autre part, Δ étant nul, on sait qu'il existe des paramètres λ, μ, ν, qui ne sont pas tous nuls, et qui vérifient les égalités

$$\begin{aligned} &(1) \quad \lambda A + \mu B'' + \nu B' = 0, \\ &(2) \quad \lambda B'' + \mu A' + \nu B = 0, \qquad (\nu \neq 0) \\ &(3) \quad \lambda B' + \mu B + \nu A'' = 0. \end{aligned}$$

On a donc

$$\nu H = \begin{vmatrix} A & B'' & 0 & C \\ B'' & A' & 0 & C' \\ B' & B & 0 & C'' \\ C & C' & \lambda C + \mu C' + \nu C'' & D \end{vmatrix}.$$

ou

$$\nu H + (\lambda C + \mu C' + \nu C'')\,\Delta' = 0.$$

Ceci posé, soit d'abord $H = 0$; si Δ' est nul, la propriété énoncée se trouve établie; sinon, il faut supposer que

$$\lambda C + \mu C' + \nu C'' = 0.$$

Cette égalité et les relations (1) et (2) représentent des équations linéaires et homogènes; elles admettent donc une solution différente de zéro et leur déterminant est nul. Or ce déterminant est justement Δ'; ainsi on ne peut pas avoir $H = 0$, si l'on n'a pas aussi $\Delta' = 0$.

Supposons maintenant $H \neq 0$; comme ν n'est pas nul, on peut écrire

$$\Delta'(\lambda C + \mu C' + \nu C'') \neq 0.$$

et, par suite,

$$\Delta' \neq 0.$$

129. Propriété caractéristique des surfaces de la seconde classe. *Dans les surfaces de la seconde classe, on a :* 1° $\Delta = 0$, 2° $H \neq 0$.

En effet, dans les équations γ' (§ 125) tous les déterminants caractéristiques [1] ne sont pas nuls; car si l'on avait $\Delta' = 0$ on aurait aussi $H = 0$, ce que nous ne supposons pas. Ces équations n'admettent donc pas une infinité de solutions et nous sommes placés dans le cas de l'impossibilité. Les surfaces considérées sont donc de la seconde ou de la quatrième classe.

Cette dernière hypothèse doit être rejetée. En effet, si les plans du centre sont parallèles, tous les mineurs du second ordre de Δ sont nuls et la forme quadrique φ est carré parfait. (Alg. § 353).

On a donc

$$f(x,y,z,t) = P^2 + 2t\left(Cx + C'y + C''z + \frac{D}{2}t\right).$$

Le produit

$$2t\left(Cx + C'y + C''z + \frac{D}{2}t\right),$$

peut être remplacé par une différence de deux carrés. Ainsi la *forme f est une somme de trois carrés*, son discriminant H est donc nul. (Alg. 348.) Ceci se reconnaît d'ailleurs directement en développant d'abord le hessien, puis les mineurs du troisième ordre, par rapport aux lettres C, C', C'', D.

1. Voyez *Alg.* (§ 101 et 102), théorème de M. Rouché.

En résumé si Δ est nul, et si H est différent de zéro, la surface qui correspond à l'équation proposée est de la seconde classe.

130. Propriété caractéristique des surfaces de la troisième classe. *Lorsqu'on suppose*

$$\Delta = 0, \quad et \quad H = 0,$$

si tous les mineurs du second ordre de Δ ne sont pas nuls, la surface qui correspond à l'équation donnée est de la troisième classe.

Dans le tableau (U) tous les déterminants du troisième ordre sont nuls, puisque nous supposons $\Delta = 0$, $H = 0$, et par suite $\Delta' = 0$.

Les équations (C') admettent une infinité de solutions; la surface considérée est de la troisième ou de la cinquième classe. Mais les mineurs de Δ n'étant pas tous nuls, les plans du centre ne peuvent pas être confondus; la surface est de la troisième classe.

Comme il y a une ligne de centres, on voit, par des considérations géométriques évidentes, que toute section faite dans la surface par un plan passant par cette droite est formée de deux droites parallèles. Ainsi *la surface est un cylindre elliptique ou hyperbolique.*

131. Propriété caractéristique des surfaces de la quatrième classe. *Lorsqu'on suppose*

$$\Delta = 0, \quad H = 0,$$

si tous les mineurs de Δ sont nuls, mais non tous les mineurs du second ordre du tableau (U), *la surface est de la quatrième classe.*

Les plans du centre sont parallèles, puisque tous les mineurs de Δ sont nuls ; la quadrique est donc de la quatrième ou de la cinquième classe; mais les plans ne sont pas confondus, puisque tous les mineurs du second ordre de (U), ne sont pas nuls. Ainsi la surface ne peut pas être de la cin-

quième classe; finalement, elle est donc de la quatrième classe.

Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut (§ 129), la forme φ est un carré parfait et l'on a

$$f(x,y,z) = P^2 + Q.$$

Sous cette forme, nous voyons que la surface est un cylindre, et en la coupant par l'un des plans de coordonnées, nous trouvons une parabole; concluons donc que *les surfaces de la quatrième classe sont des cylindres paraboliques.*

132. Propriété caractéristique des surfaces de la cinquième classe. *Lorsque l'on a*

$$\Delta = 0, \quad H = 0,$$

si tous les mineurs du second ordre du tableau (U) *sont nuls, la surface est de la cinquième classe.*

En effet, les mineurs de (U) étant nuls, les plans du centre coïncident.

Il est facile de vérifier par l'analyse que *la surface représente alors deux plans parallèles.*

On remarque d'abord que l'on a

$$\varphi = \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z)^2.$$

D'autre part les mineurs du second ordre de (U), égalés à zéro, donnent :

$$A'C = B''C, \quad B''C'' = B'C',$$

ou,

$$\frac{C}{A} = \frac{C'}{B''} = \frac{C''}{B'} = \lambda.$$

On a donc

$$f(x,y,z) = \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z)^2 + 2\lambda(Ax + B''y + B'z) + D;$$

et, en posant,

$$Ax + B''y + B'z = P,$$

on trouve

$$f(x,y,z) = \frac{1}{A}P^2 + 2\lambda P + D = \frac{1}{A}(P + \lambda A)^2 + D - \lambda^2 A$$

L'équation $f = 0$, représente donc deux plans réels, imaginaires, ou coïncidents, suivant que l'on a :

$$A(A\lambda^2 - D) > 0, \quad A(A\lambda^2 - D) < 0, \quad A(A\lambda^2 - D) = 0\,;$$

c'est-à-dire

$$C^2 - AD > 0, \quad C^2 - AD < 0, \quad \text{ou} \quad C^2 - AD = 0.$$

133. Résumé de la discussion précédente. Nous résumerons dans le tableau suivant les propriétés que nous avons successivement établies dans cette leçon.

$$(U)\begin{Vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \end{Vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}$$

1re Classe. $\begin{cases} \Delta \neq 0, \\ H \neq 0, \end{cases}$ ou $H = 0$.

2e Classe. $\begin{cases} \Delta = 0, \\ H \neq 0. \end{cases}$

3e Classe. $\begin{cases} \Delta = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ *(Tous les mineurs du second ordre de* Δ *ne sont pas nuls).*

4e Classe. $\begin{cases} \Delta = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ *(Tous les mineurs du second ordre de* Δ *sont nuls, mais tous ceux de* (U) *ne le sont pas).*

5e Classe. $\begin{cases} \Delta = 0 \\ H = 0 \end{cases}$ *(Tous les mineurs du second ordre de* (U) *sont nuls).*

EXERCICES

1. *Vérifier que le lieu des centres des quadriques qui passent par deux droites* Δ, Δ′, *est un plan parallèle à celles-ci et équidistant.*

2. *Deux coniques* U,V, *sont situées : l'une dans le plan* ZOY, *l'autre dans le plan* ZOX ; *elles coupent l'axe* OZ *aux mêmes points* A *et* B *et l'on suppose* OA = OB = *h*. *Enfin les axes* OX *et* OY *sont les diamètres conjugués des cordes parallèles à* AB.

Démontrer que le lieu des centres des quadriques qui passent par U *et* V *est une conique située dans le plan* YOX.

L'équation générale des quadriques proposées est

$$Ax^2 + A'y^2 + z^2 + 2\lambda xy + 2Cx + 2C'y = h^2,$$

λ étant un paramètre variable.

Le lieu est la conique qui, dans le plan XOY, a pour équation

$$x(Ax + C) = y(A'y + C') ;$$

on vérifiera que c'est la conique des neuf points relativement aux quatre points fixes qui sont situés sur OX et sur OY ; ce résultat pouvait être prévu à *priori.*

3. *Trouver le lieu des centres des quadriques qui correspondent à l'équation*

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta+\gamma)\,x^2 + y^2 + z^2 - 2zy - 2zx - 2xy)\\ + (\alpha+\beta-\gamma)(x+y-z) + (\beta+\gamma-\alpha)(y+z-x)\\ + (\gamma+\alpha-\beta)(x+z-y) = 0,\end{aligned}$$

α, β, γ *désignant trois paramètres variables.*

Le lieu et le plan qui a pour équation

$$x + y + z = \frac{1}{2}.$$

On trouve très simplement ce résulat en formant l'équation

$$f'_x + f'_y + f'_z = 0.$$

ONZIÈME LEÇON[1]

DIVISION DES QUADRIQUES EN GENRES. RÉDUCTION EN AXES OBLIQUES

184. Pour entrer plus profondément dans l'étude des quadriques, et aussi pour arriver plus simplement à la découverte de leurs propriétés, nous nous proposons maintenant de distinguer, dans chacune des classes que nous avons trouvées, d'après l'aspect général de la surface, les différents genres qu'elles comportent. Comme dans la géométrie plane, les propriétés algébriques des formes quadratiques vont encore nous servir à résoudre le problème que nous venons de nous poser. Elles nous permettront, notamment, d'indiquer pour chacune des classes, mais en axes obliques, une équation réduite dont la discussion nous conduira à reconnaître les formes principales affectées par les quadriques. Nous verrons plus tard que ces quadriques, aux aspects variés, ne se différencient pas moins par certaines de leurs propriétés, que par leurs formes.

185. Théorème I. *Les surfaces de la première classe, rapportées à des axes convenablement choisis, ont une équation de la forme :*

$$\text{(I)} \quad \alpha X^2 + \alpha' Y^2 + \alpha'' Z^2 = H,$$

α, α' α'' désignant des coefficients différents de zéro, et H *le Hessien de l'équation proposée.*

1. Cette leçon correspond à la question du programme : *Application des propriétés des polynômes homogènes à la classification des surfaces du second ordre et à la réduction de l'équation du second degré.*

Nous supposons $\Delta \neq 0$, par conséquent la forme φ est décomposable en trois carrés de formes linéaires indépendantes. Écrivons donc.

$$\varphi = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 + \varepsilon''(a''x + b''y + c''z)^2,$$

ou, dans la notation abrégée,

$$\varphi = \varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + \varepsilon'' w^2,$$

en posant

$$u = ax + by + cz, \quad v = a'x + b'y + c'z, \quad w = a''x + b''y + c''z.$$

Nous avons donc,

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = {} & \varepsilon(u - \lambda)^2 + \varepsilon'(v - \lambda')^2 + \varepsilon''(w - \lambda'')^2 + 2(C + \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'')x \\ & + 2(C' + \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'')y + 2(C'' + \lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'')z \\ & + D - \lambda^2 - \lambda'^2 - \lambda''^2. \end{aligned}$$

Déterminons maintenant les paramètres λ, λ', λ'', et posons

$$\begin{aligned} \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + C &= 0, \\ \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + C' &= 0, \\ \lambda c + \lambda' c' + \lambda'' c'' + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Le déterminant des inconnues est

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix},$$

c'est précisément, le déterminant des formes u, v, w, lequel n'est pas nul, puisque ces formes sont indépendantes.

Dans ces conditions, nous pourrons écrire :

$$(1) \quad f(x,y,z) = \varepsilon U^2 + \varepsilon' V^2 + \varepsilon'' W^2 + h.$$

Cette remarque étant faite, considérons les équations

$$(2) \quad U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

et soit (O'.XYZ) le trièdre formé par ces trois plans, trièdre

véritable, ayant son sommet à distance finie, puisque le déterminant des équations (2) n'est pas nul.

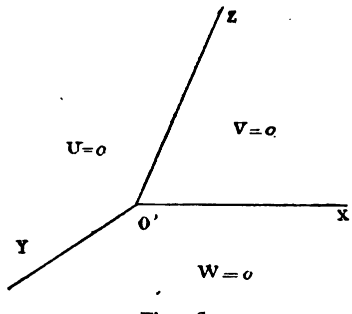


Fig. 16.

En effectuant la transformation, en passant du système proposé (o, xyz) au système nouveau $(O'.XYZ)$, une forme linéaire θ devient une forme linéaire Θ des lettres X, Y, Z. En particulier U devient une forme qui, égalée à zéro, doit représenter le plan YOZ. D'après cette remarque,

U	*devient*	mX
V	»	nY
W	»	pZ,

et la surface considérée, rapportée à ces axes nouveaux, a pour équation

$$(1') \quad \varepsilon m^2X^2 + \varepsilon' n^2Y^2 + \varepsilon'' p^2Z^2 + h = 0.$$

La nouvelle origine O' est, d'après ce résultat, un centre de la surface; si celle-ci est un cône, (si l'on a $H = 0$), l'équation (1') doit être homogène par rapport aux lettres X, Y, Z, et l'on a, par conséquent, $h = 0$. On peut donc poser

$$h = -KH$$

et,

$$\alpha = \varepsilon m^2K, \quad \alpha' = \varepsilon' n^2K, \quad \alpha'' = \varepsilon'' p^2K;$$

finalement, l'équation (I) représente toutes les surfaces de la première classe.

136. Théorème II. *Les surfaces de la seconde classe peuvent être représentés par l'équation réduite.*

$$\text{(II)} \quad \beta Y^2 + \beta' Z^2 = 2X.$$

Nous supposons $\Delta = 0$, mais $H \gtrless 0$; il résulte de cette hypothèse que la forme quadratique φ est la somme de deux carrés, mais qu'elle n'est pas un carré parfait (§ 129). Posons donc

$$\varphi = (ax + by + cz)^2 \pm (a'x + b'y + c'z)^2,$$

et, par suite,

$$f(x,y,z) = \pm (ax + by + cz)^2 \pm (a'x + b'y + c'z)^2 + mx + ny + pz + q.$$

d'ailleurs, les plans qui correspondent aux équations

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ mx + ny + pz + q &= 0; \end{aligned}$$

forment un véritable trièdre. En effet, si ce système était incompatible, ou indéterminé, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ m & n & p \end{vmatrix},$$

serait nul; mais alors les trois formes v, w, u,

$$v = ax + by + cz, \quad w = a'x + b'y + c'z, \quad u = mx + ny + pz,$$

vérifieraient la relation linéaire,

$$\lambda v + \mu w + \nu u = 0,$$

et $f(x,y,z,t)$ serait une forme quadratique des trois lettres u, v, t; f serait donc décomposable en carrés, dont le nombre serait tout au plus égal à trois; par suite, son discriminant serait nul, ce que nous ne supposons pas

D'après cela, nous pouvons poser

$$f(x,y,z) = \pm V^2 \pm W^2 + U,$$

les équations

$$U=0, \quad V=0, \quad W=0,$$

représentant trois plans formant un trièdre (O′,XYZ), que nous pouvons prendre comme trièdre des nouvelles coordonnées.

Le raisonnement qui nous a servi au paragraphe précédent prouve, les notations étant conservées, que la nouvelle équation est bien identique à (II).

137. Théorème III. *On peut toujours ramener l'équation des surfaces de la troisième classe, à la forme.*

$$\text{(III)} \qquad \gamma X^2 + \gamma' Y^2 = h.$$

Nous rappelons que dans les surfaces de la troisième classe les déterminants Δ et H sont nuls, *mais tous les mineurs du second ordre de Δ ne sont pas nuls;* φ est donc décomposable en *deux* carrés et nous avons

$$\varphi = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2;$$

par suite,

$$f = \varepsilon(ax + by + cz)^2 + \varepsilon'(a'x + b'y + c'z)^2 + 2(Cx + C'y + C''z) + D = 0,$$

ou

$$f = \varepsilon u^2 + \varepsilon' v^2 + 2w + D,$$

en posant

$$u = ax + by + cz, \quad v = a'x + b'y + c'z, \quad w = Cx + C'y + C''z.$$

Je dis que les formes u, v et w ne sont pas indépendantes. En effet, nous avons

$$\frac{1}{2} f'_x = a\varepsilon u + a'\varepsilon' v + C,$$

$$\frac{1}{2} f'_y = b\varepsilon u + b'\varepsilon' v + C',$$

$$\frac{1}{2} f'_z = c\varepsilon u + c'\varepsilon' v + C''.$$

Dans le cas des surfaces qui nous occupent, les formes f'_x, f'_y, f'_z, égalées à zéro, donnent des équations qui admettent une infinité de solutions; en considérant εu, et $\varepsilon' v$, comme des inconnues, le déterminant δ',

$$\delta' = \begin{vmatrix} a & a' & C \\ b & b' & C' \\ c & c' & C'' \end{vmatrix},$$

est donc nul et les formes u, v, w vérifient identiquement une relation linéaire, et homogène.

Cette remarque étant faite, écrivons

$$(1)\quad f = \varepsilon(u-\lambda)^2 + \varepsilon'(v-\lambda')^2 + 2x(a\varepsilon\lambda + a'\varepsilon'\lambda' + C) + 2y(b\varepsilon\lambda + b'\varepsilon'\lambda' + C') + 2z(c\varepsilon\lambda + c'\varepsilon'\lambda' + C'') + D - \varepsilon\lambda^2 - \varepsilon'\lambda'^2.$$

Si nous considérons maintenant les égalités :

$$(\mathrm{H})\quad \begin{cases} a\varepsilon\lambda + a'\varepsilon'\lambda' + C = 0, \\ b\varepsilon\lambda + b'\varepsilon'\lambda' + C' = 0, \\ c\varepsilon\lambda + c'\varepsilon'\lambda' + C'' = 0. \end{cases}$$

qui constituent trois équations entre les inconnues $\varepsilon\lambda$, $\varepsilon'\lambda'$, il est facile de reconnaitre qu'elles admettent une solution unique et finie.

En effet, le déterminant général est δ', et nous avons montré que δ' était nul; de plus, si l'on considère le tableau rectangulaire

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \right\|,$$

tous les déterminants du second ordre déduits de ce tableau ne sont pas nuls; car, s'il en était ainsi, les formes u et v ne seraient pas indépendantes et φ serait un carré parfait; cette conclusion ne peut être acceptée, puisque tous les mineurs du second ordre de Δ ne sont pas nuls.

En résumé, les équations II admettent donc une solution

unique et finie (Théorème de M. Rouché), et en considérant cette solution, pour la substituer dans (1), nous avons

$$f = \varepsilon U^2 + \varepsilon' V^2 + k.$$

En prenant les plans ($U = 0$, $V = 0$) pour YO′Z, ZO′X ; puis, pour YO′X, un troisième plan coupant la droite commune aux deux premiers, l'équation de la surface devient identique à (III).

138. Théorème IV. *L'équation des surfaces de la quatrième classe peut être ramenée à la forme*

$$\text{(IV)} \quad Y^2 + hX = 0.$$

Supposons maintenant que H et Δ soient nuls, ainsi que tous les mineurs du second ordre de Δ, *mais non tous les mineurs du second ordre du tableau rectangulaire.*

$$\left\| \begin{matrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \end{matrix} \right\|.$$

Dans cette hypothèse, φ est un carré parfait. Nous pouvons poser

$$\varphi = (ax + by + cz)^2,$$

et, par conséquent,

$$f(x,y,z,t) = (ax + by + cz)^2 + t(a'x + b'y + c'z + Dt),$$

ou

$$(1) \quad f(x,y,z,t) = u^2 + vt + Dt^2,$$

en écrivant

$$u = ax + by + cz, \quad v = a'x + b'y + c'z$$

Les plans qui correspondent aux équations

$$u = 0, \quad v = 0,$$

se coupent ; car s'ils étaient parallèles, on aurait

$$v = \lambda u + \mu t,$$

et f représenterait une forme quadratique des lettres u et t; f serait donc une somme de deux carrés et l'on pourrait écrire.

$$f(x,y,z,t) \equiv (ax + by + cz + dt)^2 + ht^2.$$

Cette conclusion est en contradiction évidente avec l'hypothèse que nous avons faite et en vertu de laquelle tous les mineurs du second ordre du tableau rectangulaire qui correspond aux équations.

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0, \quad f'_z = 0,$$

ne sont pas nuls.

Ainsi, dans l'identité (1), les formes u, v, égalées à zéro, donnent deux plans correspondants qui sont sécants. En prenant ces plans, et un troisième non parallèle à leur droite d'intersection, pour plans de cordonnées, le raisonnement que nous avons fait aux paragraphes précédents, prouve que l'équation (IV) représente bien, dans ce système, la surface considérée.

139. Théorème V. *Dans les surfaces de la cinquième classe, on peut toujours ramener leur équation à la forme*

$$\text{(V)} \qquad Z^2 = H.$$

Nous avons fait remarquer précédemment (§ 132) que l'équation des surfaces de cette classe pouvait se mettre sous la forme

$$f(x,y,z,t) \equiv (ax + by + cz + dt)^2 + ht^2,$$

en prenant pour plan XO'Y celui qui correspond à l'équation

$$ax + by + cz + dt = 0,$$

les deux autres plans étant arbitrairement choisis, mais de façon pourtant à former avec XO'Y un véritable trièdre, l'équation de la surface a donc bien la forme indiquée par l'égalité (V).

DISTINCTION DES GENRES DE QUADRIQUES D'APRÈS LES ÉQUATIONS RÉDUITES

140. Première classe. *Division en trois genres.*

1° Ellipsoïdes. L'équation réduite des surfaces de la première classe permet, conformément à la discussion qui suit, de distinguer trois genres dans les quadriques à centre unique. Cette équation étant

$$\alpha X^2 + \alpha' Y^2 + \alpha'' Z^2 = h,$$

peut s'écrire, en supposant $h \neq 0$,

$$\text{(I)} \quad \frac{X^2}{\left(\frac{h}{\alpha}\right)} + \frac{Y^2}{\left(\frac{h}{\alpha'}\right)} + \frac{Z^2}{\left(\frac{h}{\alpha''}\right)} = 1.$$

Si les quantités $\frac{h}{\alpha}, \frac{h}{\alpha'}, \frac{h}{\alpha''}$, sont toutes les trois positives, nous pouvons poser.

$$\frac{h}{\alpha} = a'^2, \qquad \frac{h}{\alpha'} = b'^2, \qquad \frac{h}{\alpha''} = c'^2;$$

et l'équation réduite prend la forme

$$\text{(E)} \quad \frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} + \frac{Z^2}{c'^2} = 1.$$

En faisant passer, successivement, dans le second membre les termes du premier, on voit que la surface est renfermée tout entière à l'intérieur du parallélipipède dont les arêtes ont pour longueur a', b' et c'. C'est une première forme qui se distingue essentiellement de celles que nous allons rencontrer. Nous appellerons **ellipsoïdes** les quadriques qui affectent cette forme caractérisée par l'absence de points réels à l'infini, forme que nous indiquons, pour la partie comprise dans le premier trièdre, par la figure ci-après.

Nous ferons observer que si les paramètres $\frac{h}{\alpha}$, $\frac{h}{\alpha'}$, $\frac{h}{\alpha''}$, étaient tous les trois négatifs, l'équation (I) n'admettrait aucune solution réelle. Lorsque cette circonstance se présente nous disons que la surface proposée est un **Ellipsoïde imaginaire.** Enfin si h est nul, α, α', α'', ayant le même signe, l'équation n'admet pas d'autre solution réelle que la solution évidente $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; nous appellerons **Ellipsoïde évanouissant** la surface qui correspond à l'équation proposée.

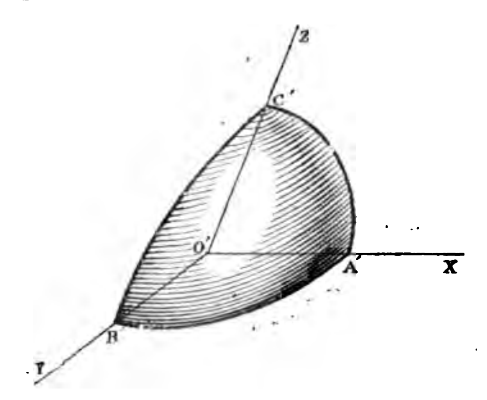


Fig. 17.

Il ne faut pas d'ailleurs attacher à ces expressions un sens autre que celui que nous venons de préciser et qui peut se résumer dans l'énoncé suivant :

Ellipsoïde imaginaire : *Lorsque l'équation du second degré donnée n'admet aucune solution réelle*; **Ellipsoïde évanouissant :** *lorsque l'équation n'admet qu'une seule solution réelle.*

On remarquera que ce dernier cas ne peut se présenter que si la forme $f(x,y,z,t)$ est la somme de trois carrés, auquel cas le hessien est nul.

2° **Hyperboloïdes**. Supposons maintenant que les coefficients $\frac{h}{\alpha}$, $\frac{h}{\alpha'}$, $\frac{h}{\alpha''}$, ne soient pas de même signe; dans ces trois

nombres, il y en a un, au moins, qui est positif et nous l'affecterons au terme en X^2; un autre est négatif, nous l'appliquerons au terme en Z^2. Quant au coefficient du terme en Y^2, il pourra, suivant les cas, être positif ou négatif : de là, une distinction nécessaire.

Supposons d'abord qu'il soit positif, et posons

$$\frac{h}{\alpha} = a'^2, \quad \frac{h}{\alpha'} = b'^2, \quad \frac{h}{\alpha''} = -c'^2.$$

L'équation de la quadrique est alors

$$(\mathrm{H}_1) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

En coupant la surface (H_1) par un plan P parallèle à XO'Y, on obtient une ellipse, et quand P s'éloigne indéfiniment, les dimensions de cette ellipse croissent au delà de toute limite. La surface qui a un centre unique et qui n'est pas un cône est donc constituée par *une nappe continue* et nous appellerons **hyperboloïdes à une nappe**, les quadriques affectant cette forme générale. La figure ci-dessous donne une idée de la forme de l'hyperboloïde à une nappe, dans l'un des trièdres de coordonnées.

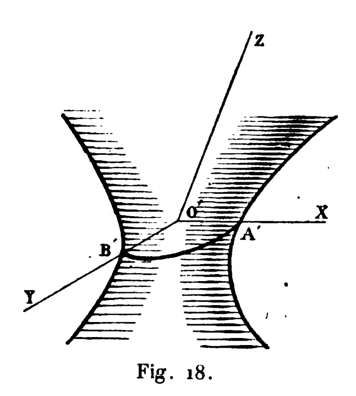


Fig. 18.

Prenons maintenant l'hypothèse contraire, et supposons

que $\frac{h}{\alpha'}$ soit négatif; l'équation réduite est, dans ce cas,

$$(H_2) \quad \frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Cette équation prouve que l'abcisse d'un point pris sur la surface (H_2) est toujours supérieure à a'; cette quadrique est formée de *deux nappes;* nous nommerons ces surfaces des **hyperboloïdes à deux nappes**.

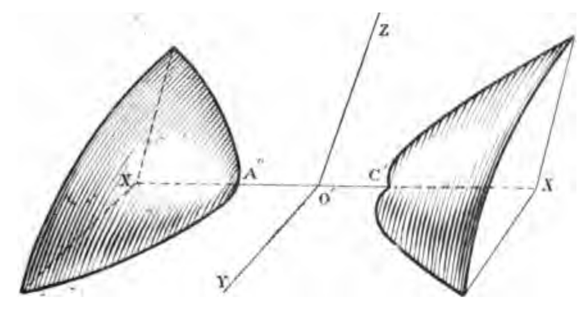


Fig. 19.

Elles ont, dans l'un des dièdres ayant pour arête XX', la forme qu'indique la figure 19; on suppose

$$O'C' = O'A'' = a'.$$

141. Deuxième classe. *Division en deux genres.* Nous avons trouvé que l'équation réduite des surfaces de la seconde classe était

$$\beta Y^2 + \beta' Z^2 = 2X.$$

On peut toujours disposer du signe du premier terme, nous supposerons $\beta > 0$; on peut aussi admettre que le coefficient du terme en X, dans le second membre, est positif; car, s'il en était différemment, on changerait la direction positive de l'axe des x. Mais le coefficient β' peut être, suivant les cas, positif ou négatif.

Si β' est positif, l'équation réduite peut s'écrire

$$(P_e) \quad \frac{Y^2}{p'} + \frac{Z^2}{q'} = 2X;$$

au contraire, si l'on suppose $\beta' < 0$, l'équation prendra la forme

$$(P_h) \quad \frac{Y^2}{p'} - \frac{Z^2}{q'} = 2X,$$

p' et q', désignant, dans ces deux égalités, des paramètres positifs.

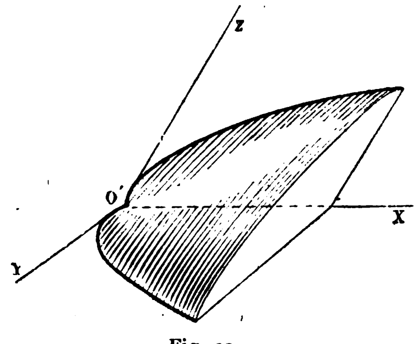


Fig. 20.

Cherchons la forme générale de la surface P_e. D'après son équation, X est toujours positif ; et en effectuant, dans la surface, des sections par des plans parallèles à YOZ, h variant de zéro à $+\infty$, le plan qui correspond à l'équation

$$X = h,$$

donne, pour section, une ellipse dont les dimensions grandissent indéfiniment. En résumé, cette surface que nous nommerons le **paraboloïde elliptique**, n'a pas de centre et se compose d'une demi-nappe s'étendant, comme l'indique la figure ci-dessus, indéfiniment dans la région positive du plan YO'Z.

Enfin, l'équation (P_h) représente une quadrique, dénuée de centre, comme la précédente, mais s'étendant indéfiniment dans la région positive et négative du plan YO'Z.

La figure ci-dessous donne une idée de la forme de cette surface qui est le **paraboloïde hyperbolique**.

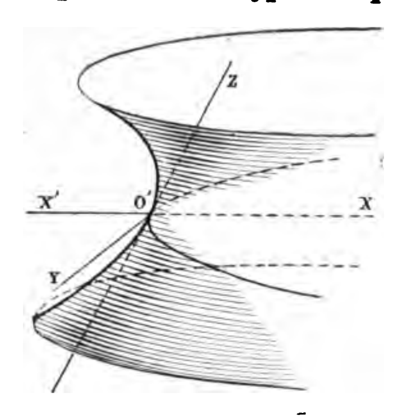


Fig. 21.

142. Nous n'avons pas à nous occuper des surfaces des trois autres classes, car la forme de ces quadriques est bien connue, puisqu'elles représentent des cylindres ou des plans. En définitive, la discussion que nous avons faite de l'équation générale du second degré prouve qu'il y a seulement, dans les deux premières classes, **cinq genres** correspondant à des formes diverses.

Nous indiquerons plus loin (Leç. 29), différents procédés pour déterminer le genre d'une quadrique dont l'équation est donnée ; mais, comme nous le ferons remarquer alors la méthode que nous venons d'exposer (*la méthode par décomposition en carrés*, comme on l'a nommée) constitue une des manières les plus simples de reconnaître, devant une équation du second degré donnée : 1° par le nombre des carrés ; 2° par les signes qu'ils affectent, la classe ou le genre de la surface qui correspond à cette équation, et de donner ainsi, finalement, le nom de la surface qu'elle représente.

La réduction à laquelle on aboutit par la méthode précédente présente une imperfection qui tient à ce que les axes de coordonnées qu'elle fournit ne sont pas, en général, rectangulaires.

A ce nouveau point de vue, la question que nous venons de traiter reste ouverte et elle sera reprise dans une prochaine leçon.

EXERCICES

1. *Réduire en axes obliques l'équation*

$$3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-\frac{2yz}{bc}-\frac{2zx}{ca}-\frac{2xy}{ab}=1.$$

Cette réduction peut s'effectuer d'une infinité de façons différentes. On peut, notamment, remarquer que l'équation proposée peut s'écrire sous la forme

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)^2=1.$$

En considérant le point M dont les coordonnées sont a, b, c, le nouveau trièdre de coordonnées sera formé par les droites joignant l'origine aux projections de M sur les anciens plans de coordonnées.

2. *Réduire en axes rectangulaires l'équation,*

$$x^2\left(\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2}{b^2}\right)+\frac{z^2}{a^2b^2}\left[c^2+\frac{(a^2+b^2)^2}{c^2}\right]$$
$$+\frac{2xy}{ab}-\frac{2xz}{a^2bc}(a^2+b^2+c^2)-\frac{2yz}{b^2ac}(a^2+b^2+c^2)=1.$$

En écrivant l'équation précédente sous la forme :

$$(1)\quad \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{a^2+b^2}{ab}\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{cz}{ab}\right)^2=1,$$

on voit que les équations

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\frac{a^2+b^2}{ab}=0,\quad \frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{cz}{ab}=0,$$

représentent trois plans formant un trièdre trirectangle.

En cherchant l'intersection des arêtes formées par ce trièdre avec l'ellipsoïde qui correspond à l'équation (1) on trouve les longueurs des droites que nous nommons plus loin les axes de la quadrique, c'est-à-dire les grandeurs qu'on peut appeler les dimensions de l'ellipsoïde. Ces longueurs sont, dans cet exemple, les racines carrées des expressions :

$$\frac{a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)^2}, \quad \frac{a^2b^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+b^2-c^2)^2}, \quad \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

Ces formules peuvent être trouvées par une méthode analytique que nous indiquerons dans une prochaine leçon. Mais cette méthode, appliquée à l'exemple proposé, donnerait lieu à des calculs très pénibles et nous avons voulu montrer, par cet exemple, comment on peut, dans quelques cas, mettre en évidence la longueur des axes en décomposant l'équation donnée en carrés.

3. *On considère l'équation proposée dans l'exercice précédent et on suppose que l'on ait*

$$c^2 = a^2 + b^2 ;$$

démontrer que la quadrique correspondante est un cylindre elliptique dont la section droite est une ellipse ayant pour axes des droites dont les longueurs sont :

$$\frac{ab}{c}, \text{ et } \frac{ab}{2c}$$

DOUZIÈME LEÇON

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES. — CONE ASYMPTOTE

La méthode par décomposition en carrés, qui vient de nous servir à découvrir les formes diverses affectées par les quadriques, conduit aussi, très simplement, à la détermination des droites qui sont situées tout entières sur ces surfaces. La recherche de ces droites remarquables va nous occuper dans cette leçon ; mais nous remettons l'étude de leurs propriétés à l'époque où nous traiterons les quadriques, d'après leurs équations réduites.

143. Génératrices rectilignes. On dit qu'une droite Δ est une génératrice rectiligne d'une surface Σ, lorsque, en supposant que Δ soit mobile dans l'espace, d'après une loi donnée, Σ est engendrée complètement par Δ.

Les surfaces qui sont susceptibles d'un pareil mode de génération se nomment des *surfaces réglées*.

Dans d'autres cas, une surface peut admettre un certain nombre de droites qui sont situées sur elle ; et qu'on nomme *droites de la surface*. Si la surface est d'ordre p, une droite Δ est située sur elle, tout entière, lorsqu'elle a $p+1$ points communs avec cette surface.

Nous nous proposons de déterminer les génératrices rectilignes des quadriques, en considérant, dans cette recherche, les cinq genres que nous venons de distinguer.

D'ailleurs, les variétés des quadriques, cônes, cylindres, plans parallèles, ou plans sécants, admettent des génératrices que l'on met en évidence, immédiatement, en décomposant

l'équation en carrés et en appliquant, à la forme nouvelle, certains principes exposés plus haut (§ 110 et 113).

144. Méthode générale. Nous indiquerons d'abord la méthode générale pour trouver les droites situées sur une surface dont l'équation

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0,$$

est connue, soient

$$(2) \quad x = az + p, \quad y = bz + q,$$

les équations de la droite, sous la forme réduite. Si l'on remplace x et y, en fonction de z, dans l'égalité (1), il en résulte une équation en z dont tous les coefficients sont nuls. Si les équations admettent une infinité de solutions, la surface considérée est réglée, si elles ont quelques solutions, il y a des droites sur la surface, en nombre fini; enfin si elles ne peuvent être vérifiées par aucune valeur réelle des inconnues $(a, b; p, q)$, on peut dire qu'il n'y a aucune droite, sur la surface proposée.

Il faut pourtant observer que les équations (2) ne pouvant pas représenter des droites parallèles au plan yox, on doit, au préalable, examiner ce cas particulier qui, d'ailleurs, ne présente aucune difficulté, puisque les sections faites par les plans parallèles à yox se projettent, sur ce plan, en vraie grandeur.

Dans le cas des surfaces du second degré, la méthode que nous venons d'indiquer conduit à une difficulté que nous voulons signaler. L'équation que l'on doit considérer est

$$f(az + p, bz + q, z) = 0.$$

Lorsqu'elle est développée, elle donne une équation du second degré en z; et, en égalant à zéro ses coefficients, on obtient pour déterminer les *quatre* inconnues, *trois* équations seulement. On aboutit, ainsi, à une *analyse indéterminée*, le nombre des inconnues dépassant celui des équations.

Un pareil système peut, suivant les exemples, admettre une infinité de solutions, ou quelques solutions seulement; il peut enfin être incompatible. De là, une discussion d'un genre particulièrement délicat et qui constitue, en général, une difficulté.

La méthode par la décomposition en carrés permet de tourner cette difficulté et de résoudre, avec la plus grande facilité, le problème que nous nous sommes posé et que nous allons maintenant résoudre.

145. Théorème. *Les surfaces suivantes :*

Ellipsoïdes, Hyperboloïdes à deux nappes
Paraboloïdes elliptiques.

n'admettent aucune droite.

Des considérations géométriques, tirées de la forme de ces surfaces, rend cette proposition évidente; mais nous allons la vérifier par l'analyse.

Nous ferons d'abord remarquer qu'il n'existe pas, sur ces surfaces, de droites parallèles au plan yox. Car, en faisant $z = h$ dans les équations réduites, nous avons :

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1-\frac{h^2}{c'^2}, \quad \frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{h^2}{c'^2}, \quad \frac{y^2}{p'}+\frac{h^2}{q'}=2x.$$

Ces sections sont, respectivement : une ellipse, une hyperbole qui ne peut jamais se réduire à deux droites, et une vraie parabole; ainsi, nous pouvons nous borner à rechercher les droites qui ne sont pas parallèles à yox.

Soient

$$\frac{x}{a'}=\lambda\frac{z}{c'}+\mu, \quad \frac{y}{b'}=\lambda'\frac{z}{c'}+\mu'.$$

les équations d'une droite Δ. En cherchant à placer Δ sur l'ellipsoïde, le coefficient de z^2 étant $1+\lambda^2+\lambda'^2$, l'impossibilité du problème se trouve immédiatement reconnue.

Prenons le cas de l'hyperboloïde à deux nappes, qui est

un peu plus délicat. Les équations que nous devons discuter sont

$$\lambda^2 - \lambda'^2 - 1 = 0, \quad \mu^2 - \mu'^2 - 1 = 0, \quad \lambda\mu = \lambda'\mu'$$

L'incompatibilité de ce système est mise en évidence en remarquant que nous avons, par combinaison,

$$\lambda^2\mu^2 = (\lambda'^2 + 1)(\mu'^2 + 1),$$

et

$$\lambda^2\mu^2 = \lambda'^2\mu'^2,$$

ce qui conduit à l'impossibilité suivante :

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + 1 = 0.$$

Enfin, dans le cas du paraboloïde elliptique, en prenant les équations de Δ sous la forme

$$x = mz + n, \quad y = m'z + n',$$

on voit que le coefficient de z^2 étant égal à

$$\frac{m'^2}{p'} + \frac{1}{q'},$$

ne peut jamais être nul; p' et q' étant positifs.

146. Théorème. *Les surfaces suivantes :*

Hyperboloïdes à une nappe, Paraboloïdes hyperboliques.

admettent un double système de génératrices rectilignes.

Considérons d'abord le cas des hyperboloïdes à une nappe. Nous avons vu que la méthode de décomposition en carrés permettait de mettre l'équation de cette surface sous la forme

$$(1) \quad U^2 - V^2 + W^2 = 1.$$

Celle-ci peut s'écrire

$$(U - V)(U + V) = (1 - W)(1 + W),$$

ou

$$\frac{U-V}{1-W}=\frac{1+W}{U+V}=t,$$

t désignant la valeur commune de ces rapports.

Ceci posé, les équations :

$$(G)\quad \begin{cases} (2) \quad U-V=t(1-W), \\ (3) \quad t(U+V)=1+W, \end{cases}$$

représentent une droite, et si l'on cherche l'intersection de cette droite avec la surface proposée, on doit résoudre les équations (1) (2), et (3). Or, toute solution de ces deux dernières est aussi une solution de la première ; puisque l'on reproduit (1), en multipliant les égalités (2) et (3), membre à membre. Ceci a lieu *quel que soit t;* en faisant varier t de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient donc un système de droites qui sont situées sur la surface.

Ces droites sont bien les *génératrices* de l'hyperboloïde à une nappe ; c'est-à-dire que toute la surface peut être engendrée par la droite mobile G. Mais, comme nous l'avons dit, nous reviendrons plus tard sur l'étude particulière des génératrices et nous donnerons, seulement alors, leurs principales propriétés.

Nous devons encore remarquer que l'équation (1) écrite sous la forme

$$\frac{U-V}{1+W}=\frac{1-W}{U+V}=\theta,$$

conduit à un second système de génératrices rectilignes, ce système correspondant aux équations

$$(G')\quad \begin{cases} U-V=\theta(1+W), \\ \theta(U+V)=1-W, \end{cases}$$

dans lesquelles θ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ces droites G′ sont d'ailleurs distinctes des droites G précédemment trouvées ; elles constituent un second système de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe.

Enfin, nous verrons dans l'étude particulière, annoncée plus haut, qu'il n'y a pas trois systèmes de génératrices rectilignes; la méthode par décomposition en carrés résout donc complètement le problème qui vient de nous occuper.

Cette observation s'applique au paraboloïde hyperbolique qui possède, lui aussi, deux systèmes de génératrices rectilignes.

Prenons l'équation de la surface sous la forme

$$U^2 - V^2 + W = 0;$$

celle-ci peut s'écrire

$$\frac{V-U}{W} = \frac{1}{V+U} = t,$$

et la droite qui correspond aux équations

$$(\delta) \quad \begin{cases} V - U = tW, \\ t(V+U) = 1, \end{cases}$$

est située, tout entière, sur la surface proposée.

On obtient le second système de génératrices en écrivant l'équation donnée sous la forme.

$$\frac{V+U}{W} = \frac{1}{V-U} = \theta,$$

et les équations des génératrices du second système sont

$$(\delta') \quad \begin{cases} V + U = \theta W, \\ \theta(V-U) = 1. \end{cases}$$

147. Directions asymptotiques. On dit qu'une droite Δ a une direction asymptotique par rapport à une surface Σ lorsque l'un des points communs à Δ et à Σ est rejeté à l'infini.

Si, par un point de l'espace, on mène des parallèles à toutes ces droites singulières, le cône ainsi obtenu est appelé *cône des directions asymptotiques*. Il existe, dans les quadriques, une relation remarquable entre les directions asymptotiques

et celles des génératrices. Cette relation est rendue immédiatement évidente par la géométrie ; mais nous voulons la reconnaître par l'analyse.

148. Théorème. *Le cône des directions asymptotiques s'obtient en égalant à zéro le groupe homogène formé par les termes du degré le plus élevé.*

Soit

$$(\Sigma) \quad f(x,y,z) = 0,$$

l'équation de la surface. En mettant en évidence les groupes homogènes, on a

$$f(x, y, z) \equiv \varphi_p(x, y, z) + \varphi_{p-1}(x, y, z) + \ldots\ldots + \varphi_0,$$

Les équations d'une droite Δ étant prises sous la forme

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation

$$\varphi_p(x_0 + \alpha\rho, y_0 + \beta\rho, z_0 + \gamma\rho) + \varphi_{p-1} + \ldots = 0$$

ou

$$\rho^p \varphi_p(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots = 0.$$

Pour que Δ ait une direction asymptotique, il est nécessaire et suffisant que la relation

$$\varphi_p(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

soit vérifiée. Si, par l'origine, nous menons des parallèles à ces droites singulières Δ le lieu décrit par les parallèles, est le cône qui correspond à l'équation

$$\varphi_p(x, y, z) = 0.$$

149. Théorème. *Le cône des directions asymptotiques est :*

Imaginaire *dans l'***Ellipsoïde** ;

Réel, *dans les* **Hyperboloïdes** ;

Réduit à **une droite,** *dans le* **Paraboloïde** *et dans le* **Cylindre elliptiques,**

Formé de **deux plans,** *dans le* **Paraboloïde** *et dans le* **Cylindre hyperboliques** ;

Constitué par **un plan,** *dans les* **Cylindres paraboliques.**

Cette proposition est la conséquence immédiate du théorème général que nous avons établi au paragraphe précédent et des formes affectées par l'équation du second degré, quand on décompose celle-ci en carrés.

150. Surfaces asymptotes. Deux surfaces Σ, Σ', sont mutuellement asymptotes quand la longueur de la corde interceptée entre ces deux surfaces tend vers zéro, la corde s'éloignant à l'infini.

151. Théorème. *Le cône des directions asymptotiques qni a pour sommet le centre d'un hyperboloïde, est asymptote à cette quadrique.*

L'équation de la surface étant prise sous la forme réduite

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} \pm \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

le cône des directions asymptotiques est représenté par

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} \pm \frac{z^2}{c'^2} = 0.$$

Si nous désignons par z et Z les cotes qui, dans ces deux surfaces, correspondent à la même valeur attribuée à x et à y, nous aurons

$$\pm \frac{Z^2 - z^2}{c'^2} = 1,$$

ou,

$$\pm (Z - z) = \frac{c'^2}{Z + z}.$$

Si la corde parallèle à l'axe oz que nous venons de considérer s'éloigne indéfiniment, z et Z croissent, sans limite, et la différence $Z-z$ tend vers zéro. Cette remarque prouve que les deux surfaces considérées sont asymptotes.

152. Théorème. *Si $f(x, y, z)=0$, est l'équation d'une quadrique à centre, l'égalité*

$$f(x, y, z)-\frac{H}{\Delta}=0,$$

représente le cône asymptote.

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées du centre C; si l'on transporte les axes, parallèlement à eux mêmes, en ce point, on a (§ 126)

$$f(x, y, z)\equiv\varphi_2(x-x_0, y-y_0, z-z_0)+\frac{H}{\Delta}.$$

Mais l'équation

$$\varphi_2(x-x_0, y-y_0, z-z_0)=0,$$

représente un cône ayant son sommet en C et dont les génératrices sont parallèles aux directions asymptotiques. D'après cette remarque, l'équation du cône asymptote est donc

$$f(x, y, z)-\frac{H}{\Delta}=0.$$

153. Théorème. *Le cône asymptote est l'enveloppe des plans tangents à la quadrique correspondante Σ, quand le point de contact s'éloigne à l'infini.*

Plaçons l'origine au centre de Σ; désignons par x', y', z', les coordonnées d'un point M pris sur cette surface; soit $\varphi_2(x, y, z)-h=0$, son équation.

L'équation du plan tangent en M est

$$x\varphi'_{x'}+y\varphi'_{y'}+z\varphi'_{z'}-h=0,$$

et si M s'éloigne à l'infini dans la direction (α, β, γ) le plan tangent correspond, à la limite, à l'équation

$$(P)\quad ux+vy+wz=0,$$

en posant

$$(1)\quad u = A\alpha + B''\beta + B'\gamma,\quad v = B''\alpha + A'\beta + B\gamma,\quad w = B'\alpha + B\beta + A''\gamma.$$

Nous avons aussi

$$(2)\quad \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

et, par suite, en combinant ces égalités

$$(3)\quad u\alpha + v\beta + w\gamma = 0.$$

En éliminant α, β, γ entre (1) et (3), il vient

$$\begin{vmatrix} & \Delta & & u \\ & & & v \\ & & & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette relation, et en adoptant la notation ordinaire pour les mineurs de Δ, nous l'écrirons

$$(4)\quad au^2 + a'v^2 + a''w^2 - 2bvw - 2b'uw - 2b''uv = 0.$$

Pour trouver l'enveloppe du plan (P) prenons les dérivées partielles, par rapport aux paramètres variables u, v, w, dans les équations (P) et (4) et nous avons

$$\frac{au - b''v - b'w}{x} = \frac{-b''u + a'v - bw}{y} = \frac{-b'u - bv + a''w}{z} = -t,$$

$-t$ désignant la valeur commune de ces rapports. Les égalités

$$\begin{aligned} ux + vy + wz &= 0, \\ ua - vb'' - wb' + tx &= 0, \\ -ub'' + va' - wb + ty &= 0, \\ -ub' - vb + wa'' + tz &= 0, \end{aligned}$$

donnent

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 0 \\ a & -b'' & -b' & x \\ -b'' & a' & -b & y \\ -b' & -b & a'' & z \end{vmatrix} = 0.$$

En développant cette équation et en tenant compte des égalités connues (*Alg.*, note C ; § 21), égalités qui sont d'ailleurs faciles à vérifier :]

$$a'a'' - b^2 = A\Delta, \qquad a''a - b'^2 = A'\Delta, \qquad aa' - b''^2 = A''\Delta;$$
$$ab - b'b'' = -B\Delta, \quad a'b' - bb'' = -B'\Delta, \quad a''b'' - bb' = -B''\Delta;$$

on trouve, finalement, pour l'équation de l'enveloppe,

$$\varphi_2(x, y, z) = 0.$$

154. Théorème. *Si, par le centre d'un hyperboloïde, on mène des parallèles aux génératrices de l'un des systèmes, le lieu décrit par les parallèles est le cône asymptote.*

La surface étant rapportée à son centre, son équation peut se mettre sous la forme

$$u^2 - v^2 + w^2 = 1,$$

u, v, w, étant des fonctions linéaires et homogènes.

Les équations d'une génératrice G sont (§ 146)

$$u - v = t(1 - w),$$
$$t(u + v) = 1 + w;$$

par conséquent, si, par l'origine, nous menons une droite Δ parallèle à G, ses équations sont

$$u - v = -tw,$$
$$t(u + v) = w.$$

Pour avoir le lieu décrit par Δ, il suffit d'éliminer t entre ces deux équations, ce qui donne

$$u^2 - v^2 = -w^2,$$

ou

$$u^2 - v^2 + w^2 = 0.$$

Le lieu cherché est donc le cône qui a pour équation

$$\varphi_2(x, y, z) = 0;$$

c'est bien l'équation du cône asymptote.

EXERCICES

1. *Trouver les génératrices rectilignes de la surface qui correspond à l'équation*

$$ayz + bzx + cxy + d = 0.$$

L'équation du cône asymptote est

$$ayz + bzx + cxy = 0,$$

et, parmi les génératrices de ce cône, on aperçoit immédiatement les axes de coordonnées.

En cherchant la condition que doivent remplir les coefficients λ, et μ, pour que les équations

$$x = \lambda, \quad y = \mu,$$

représentent une droite située tout entière sur la surface, on trouve que le problème est possible ou impossible suivant que $abcd$ est positif, ou négatif.

Si $abcd$ est nul, la surface proposée est un cône ou un cylindre.

2. *Trouver toutes les droites réelles qui sont situées sur la surface qui correspond à l'équation*

$$(1) \quad \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{z^3}{c^3} = 1.$$

La forme de cette équation prouve que les équations :

$$(\Delta) \left\{ \begin{array}{l} \frac{z}{c} - 1 = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0; \end{array} \right. \quad (\Delta') \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} - 1 = 0, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0; \end{array} \right. \quad (\Delta'') \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{b} - 1 = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0; \end{array} \right.$$

représentent trois droites $\Delta, \Delta', \Delta''$, situées sur la surface. Il faut démontrer qu'il n'en existe pas d'autre.

On voit d'abord, en cherchant l'intersection de la surface (1) par un plan parallèle à yox, qu'il n'y a pas de droites sur la surface, dans l'un quelconque de ces plans, si ce n'est dans celui qui a pour équation $z = c$.

Prenons les équations d'une droite δ, non parallèle à yox, sous la forme :

$$\frac{x}{a} = m\frac{z}{c} + n, \quad \frac{y}{b} = p\frac{z}{c} + q.$$

Nous obtenons alors, pour déterminer les inconnues m, n, p, q, les équations suivantes :

$$(A) \quad \begin{cases} m^3 + p^3 + 1 = 0, \\ n^3 + q^3 - 1 = 0\,; \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} m^2 n + p^2 q = 0, \\ n^2 m + q^2 p = 0. \end{cases}$$

Les égalités (B) donnent, par combinaison,

$$m^3 n^3 = p^3 q^3,$$

et, par suite,

$$\frac{m^3}{q^3} = \frac{p^3}{n^3} = \frac{m^3 + p^3}{n^3 + q^3} = -1.$$

Nous avons donc

$$-m = q, \quad \text{et} \quad -p = n.$$

Les égalités (A) et (B) peuvent alors s'écrire,

$$m^3 + p^3 + 1 = 0, \quad mp(m + p) = 0.$$

Les coefficients m et p sont différents de zéro, si, comme nous le supposons δ ne désigne pas une droite parallèle au plan yoz, ou zox. On est ainsi conduit aux relations incompatibles

$$m^3 + p^3 + 1 = 0, \quad \text{et} \quad m + p = 0.$$

3. *Démontrer qu'il y a trois droites situées sur la surface qui a pour équation*

$$xyz - ayz - bzx - cxy = 0,$$

et qu'il n'y en a pas davantage.

4. *On considère la quadrique Q qui correspond à l'équation*

$$xy = z^2 - 1,$$

et, sur cette surface, la droite G dont les équations sont

$$x = z - 1, \quad y = z + 1.$$

Trouver le lieu décrit par les normales menées à Q, par tous les points de G.

On trouvera que le lieu est une surface du second degré ayant pour équation

$$(x - y - 4)(x + y + z - 3) = 6(y - 2).$$

5. *Démontrer que si l'on considère un cylindre hyperbolique, le lieu de asymptotes des sections planes est un système de deux plans, chacun d'eux étant asymptote à la surface.*

On prendra l'équation du cylindre sous la forme

$$P^2 - Q^2 = 1,$$

et l'on voit facilement que le lieu cherché est constitué par les plans qui ont pour équation, respectivement,

$$P = 0, \quad \text{et} \quad Q = 0.$$

6. *Démontrer que la surface cubique qui correspond à l'équation*

$$(y + x)(x - z)(x + z - 2y) = a(y - z)^2$$

admet un double système de génératrices rectilignes parallèles au plan qui a pour équation

$$y + x = 0.$$

On arrive rapidement au résultat en observant que l'équation peut se mettre sous la forme

$$(x - y)^2 (x + y) = (y - z)^2 (y + x + a).$$

7. *Démontrer que le cône asymptote est le lieu des asymptotes des sections centrales.*

TREIZIÈME LEÇON

PLANS DIAMÉTRAUX

155. Théorème. *Le lieu des milieux des cordes* Δ *d'une quadrique* Q, *qui restent parallèles à une direction fixe, est un plan ; ce plan est nommé plan diamétral conjugué des cordes* Δ.

Soient

$$(\Delta) \quad \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma} = \rho,$$

les équations d'une des cordes considérées; x_0, y_0, z_0, désignant les coordonnées d'un point arbitrairement choisi sur elle; α, β, γ, étant des nombres fixes représentant les paramètres directeurs de la droite à laquelle ces cordes restent parallèles.

Cherchons l'intersection de Δ et de Q; et, à cet effet, considérons, comme nous l'avons fait précédemment, l'équation

$$(\text{A}) \quad f(x_0, y_0, z_0) + \rho\left(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0}\right) + \rho^2 \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma,) = 0.$$

Si nous supposons $\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) \neq 0$, cette équation du second degré en ρ doit avoir ses racines égales et de signes contraires, si le point (x_0, y_0, z_0) est le milieu de la corde Δ. Nous avons donc

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0,$$

ou, en rendant x_0, y_0, z_0, coordonnées courantes,

$$(\text{D}) \quad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Cette équation représente bien un plan.

Nous poserons, pour abréger un peu l'écriture dans la discussion qui suit,

$$U = f'_x, \quad V = f'_y, \quad W = f'_z,$$

et nous écrirons, par conséquent, le plan diamétral sous la forme

$$(D') \quad \alpha U + \beta V + \gamma W = 0.$$

Nous nous réservons d'ailleurs d'examiner tout à l'heure le cas que nous avons réservé, celui où l'on a

$$\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0;$$

c'est le cas où les cordes considérées ont, par rapport à la quadrique donnée, *une direction singulière.*

156. Théorème I. *Dans les surfaces de la première classe, les plans diamétraux passent par un point fixe, centre de la quadrique.*

Cette propriété résulte visiblement de l'équation (D'); car si les équations

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0,$$

ont une solution, le plan qui correspond à (D') admet, lui aussi, cette solution.

157. Théorème II. *Dans les surfaces de la seconde classe, tous les plans diamétraux sont parallèles à une droite fixe.*

Il convient ici de distinguer deux cas : les plans du centre peuvent être parallèles à une même droite en formant une figure prismatique; ou bien, deux plans du centre peuvent être parallèles, le troisième étant sécant à ceux-ci.

Dans la première hypothèse, nous avons

$$\lambda U + \mu V + \nu W + \rho = 0,$$

λ, μ, ν, n'étant pas nuls simultanément. Soit $\nu \neq 0$; l'équation (D') peut s'écrire :

$$\nu(\alpha U + \beta V) - \gamma(\lambda U + \mu V + \rho) = 0.$$

Cette équation représente un plan parallèle à la droite D, qui a pour équations

$$U = 0, \quad V = 0.$$

Si nous supposons maintenant que les égalités

$$V = 0, \quad W = 0,$$

représentent deux plans parallèles, nous avons

$$W \equiv \lambda' V + \mu' ;$$

et, à l'équation

$$\alpha U + \beta V + \gamma(\lambda' V + \mu') = 0,$$

correspond un plan diamétral qui est encore parallèle à la droite D.

158. Théorème III. *Dans les surfaces de la troisième classe, surfaces qui admettent une ligne de centres, les plans diamétraux passent par cette droite.*

Dans le cas des surfaces de la troisième classe on a

$$\lambda U + \mu V + \nu W \equiv 0,$$

λ, μ, ν, n'étant pas nuls à la fois. Soit $\nu \neq 0$; l'équation du plan diamétral peut s'écrire.

$$\nu(\alpha U + \beta V) - \gamma(\lambda U + \mu V) = 0.$$

Le plan correspondant passe par la droite qui a pour équations

$$U = 0, \quad V = 0 ;$$

et cette droite n'est autre que la ligne des centres.

159. Théorème IV. *Dans les surfaces de la quatrième classe tous les plans diamétraux sont parallèles à un plan fixe.*

Les surfaces de la quatrième classe sont caractérisées par ce fait que les plans du centre sont parallèles, sans être confondus. On a donc

$$V = \lambda U + \lambda', \qquad W = \mu U + \mu',$$

et l'équation du plan diamétral peut s'écrire

$$U(\alpha + \beta\lambda + \gamma\mu) + \beta\lambda' + \gamma\mu' = 0.$$

Le plan correspondant est constamment parallèle à un plan fixe, dont l'équation est

$$U = 0.$$

160. Théorème V. *Dans les surfaces de la cinquième classe les plans diamétraux coïncident avec un plan fixe.*

Dans ce dernier cas, les plans du centre coïncident et l'on peut poser

$$V = \lambda U, \qquad W = \mu U;$$

l'équation du plan diamétral est donc

$$U(\alpha + \beta\lambda + \gamma\mu) = 0.$$

Ainsi, ce plan coïncide avec le plan des centres qui correspond à l'équation.

$$U = 0.$$

161. Directions singulières. Nous avons maintenant à examiner le cas où les paramètres α, β, γ, de la direction donnée, vérifient l'égalité

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Cherchons ce que représente, dans cette hypothèse, l'équation

$$\text{(D)} \qquad \alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

La droite Δ qui, dans ce cas, a une direction asymptotique (§ 148), rencontre la quadrique Q, en un seul point à distance finie.

Il y a un autre point M commun à Δ et à Q, à distance finie, quand on suppose

$$\alpha f'_{x_0} + 6 f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} \neq 0.$$

Mais si l'on a

$$\alpha f'_{x_0} + 6 f'_{y_0} + \gamma f'_{z_0} = 0,$$

le terme en ρ de l'équation (A) étant nul, M s'est éloigné à l'infini et la droite Δ est située tout entière sur Q, ou la rencontre en deux points rejetés à l'infini; suivant que $f(x_0, y_0, z_0)$ est nul, ou différent de zéro.

L'équation (D) représente donc un plan, que nous appellerons *plan diamétral singulier* pour marquer que son équation est celle du plan diamétral, dans le cas particulier où α, 6, γ, représentent les paramètres d'une direction singulière. Nous allons signaler les propriétés les plus saillantes de ce plan: mais nous ferons préalablement remarquer que, par sa définition même, il jouit de la propriété d'être *le lieu géométrique des points tels que si par l'un d'eux on mène une parallèle à la direction singulière correspondante, cette droite rencontre la quadrique de deux points rejetés à l'infini, si elle n'est pas située tout entière sur la surface.*

162. Plan diamétral singulier. (**Première propriété.**) *Le plan diamétral singulier est parallèle à la direction singulière qui lui correspond.*

Vérifions d'abord cette propriété par l'analyse.

L'équation du plan diamétral singulier est

$$x(A\alpha + B''6 + B'\gamma) + y(B''\alpha + A'6 + B\gamma) + z(B'\alpha + B6 + A''\gamma) \\ + C\alpha + C'6 + C''\gamma = 0,$$

ou

$$x\varphi'_\alpha(\alpha, 6, \gamma) + y\varphi'_6(\alpha, 6, \gamma) + z\varphi'_\gamma(\alpha, 6, \gamma) + 2(C\alpha + C'6 + C''\gamma) = 0.$$

Mais on a (Th. d'Euler; *Alg.*, § 305)

$$2\varphi(\alpha, 6, \gamma) \equiv \alpha\varphi'_\alpha + 6\varphi'_6 + \gamma\varphi'_\gamma;$$

et cette identité prouve la propriété énoncée.

La démonstration de ce théorème résulte encore des considérations géométriques suivantes.

Soit Δ une droite parallèle à la direction singulière considérée, et soit P le plan diamétral correspondant. Prenons sur P un point M et menons par M une droite Δ' parallèle à Δ : Δ' rencontre la quadrique en deux points rejetés à l'infini ; ou bien, est située sur elle, tout entière. Cette remarque étant faite, considérons sur Δ' un autre point M' et menons

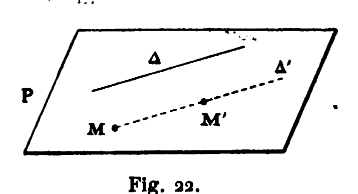


Fig. 22.

par M' un parallèle à la direction singulière Δ ; nous obtenons la droite Δ' elle-même. Ainsi, le point M' jouit de la propriété qui est caractéristique des points situés dans le plan P : une parallèle menée par M' à la direction singulière Δ rencontre la quadrique en deux points rejetés à l'infini ou est placée sur elle, tout entière. La droite Δ' est donc située dans le plan P et l'on peut dire que P est parallèle à Δ.

163. (Deuxième propriété.) *La section faite dans une quadrique par un plan diamétral singulier est, en général, un système de deux droites, parallèles à la direction singulière correspondante.*

Imaginons, en effet, cette section et soit M_0 un point pris sur elle. Si par M_0 on mène une parallèle Δ_0 à la direction singulière considérée, l'équation en ρ (§ 155) est vérifiée identiquement ; la parallèle Δ est donc située sur la surface.

Mais nous savons que cette droite est dans le plan diamétral, elle fait donc partie de la courbe cherchée. Celle-ci étant du second ordre, elle ne peut être formée que par un système

de deux droites dont l'une est Δ_0; nous désignerons la seconde par Δ_1 et il nous reste à montrer que Δ_1, est rejeté à l'infini, ou est parallèle à Δ_0.

En effet si Δ_1, n'était pas parallèle à Δ_0, en prenant sur Δ_1, un point M_1, et en menant par M_1 une parallèle à la direction singulière Δ_0, la droite ainsi obtenue serait située tout entière sur la surface, ce qui n'est pas possible si le plan diamétral ne fait pas partie de la surface, singularité qui ne peut évidemment se présenter que dans le cas où la quadrique proposée est formée par deux plans.

164. Cette propriété des plans diamétraux singuliers permet de voir comment, par un certain côté, ces plans se rattachent aux plans diamétraux ordinaires.

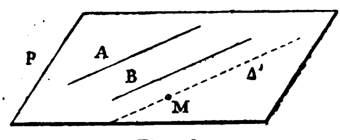


Fig. 23.

Soit P un plan diamétral singulier, et soient A et B les deux droites représentant l'intersection de P avec la quadrique proposée Q. Si nous prenons sur P un point M et si, par ce point, nous menons une parallèle à la direction singulière qui correspond à P : 1° Cette droite est tout entière située dans P ; 2° elle rencontre Q en deux points rejetés à l'infini. En considérant Δ' comme une corde dont la longueur est infinie, le point M peut être envisagé comme étant le milieu de cette corde. Lorsque M est pris sur A, ou sur B; en choisissant, de part et d'autre, sur ces droites, deux points équidistants, on peut encore dire que M est le milieu d'une corde dont les extrémités appartiennent à la quadrique et c'est ainsi qu'on peut s'expliquer comment la recherche des plans diamétraux ordinaires conduit à la découverte des plans diamétraux singuliers.

Nous allons maintenant entrer dans des détails plus circonstanciés sur le plan diamétral singulier, en le considérant successivement dans les différentes classes de quadriques.

Cette étude, par certains points, complètera celle que nous avons faite dans la leçon précédente, quand nous avons considéré le cône asymptote.

165. Théorème I. *Dans les quadriques de la première classe les plans diamétraux singuliers enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la surface; ce cône n'est autre que le cône asymptote qui, l'origine étant placée au centre de la surface, a pour équation*

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Le plan dont nous cherchons l'enveloppe a pour équation

$$\alpha f'_x + 6 f' + \gamma f'_z = 0,$$

$\alpha, 6, \gamma$, vérifiant l'égalité

$$(1) \quad \varphi(\alpha, 6, \gamma) = 0.$$

Nous avons donc (§ 102)

$$(2) \quad \frac{f'_x}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_y}{\varphi'_6} = \frac{f_z}{\varphi'_\gamma}.$$

Si, par l'origine, nous menons une parallèle à la droite (2) ses équations sont

$$\frac{\varphi'_x}{\varphi'_\alpha} = \frac{\varphi'_y}{\varphi'_6} = \frac{\varphi'_z}{\varphi'_\gamma}.$$

Ces relations du premier degré sont vérifiées par $x = \alpha$, $y = 6$, $z = \gamma$; elles représentent donc une droite joignant l'origine au point $(\alpha, 6, \gamma)$ et, par conséquent, ayant pour équations

$$(3) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{6} = \frac{z}{\gamma}.$$

Entre (1) et (3) si nous éliminons α, β, γ, nous avons

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z) = 0.$$

Comme le plan diamétral passe toujours par le centre de la quadrique, son enveloppe est bien un cône, ayant ce point pour sommet, cône égal à celui qui correspond à l'équation (4).

166. Théorème II. *Dans les surfaces de la seconde classe, les plans diamétraux singuliers se divisent en deux séries; les plans qui constituent chacune d'elles sont parallèles à un plan fixe; de plus, chaque plan diamétral singulier coupe la surface suivant deux droites dont l'une est rejetée à l'infini.*

Le déterminant Δ étant nul, φ est une somme ou une différence de deux carrés; plaçons-nous dans cette seconde hypothèse, pour raisonner sur des éléments réels, et posons

$$\varphi(x, y, z) = (ax + by + cz)^2 - (a'x + b'y + c'z)^2 = u^2 - v^2.$$

Nous avons donc

$$(1) \quad \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = (a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 - (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)^2 = u'^2 - v'^2 = 0$$

et, par suite

$$\frac{1}{2}\varphi'_\alpha = au' - a'v', \quad \frac{1}{2}\varphi'_\beta = bu' - b'v', \quad \frac{1}{2}\varphi'_\gamma = cu' - c'v'.$$

L'équation du plan diamétral singulier peut s'écrire

$$x(au' - a'v') + y(bu' - b'v') + z(cu' - c'v') + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$$

ou

$$(2) \qquad u'u - v'v + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Les nombres u' et v' sont, d'après (1), égaux et de même signe, ou égaux et de signes contraires; de là les deux séries que nous avons distinguées. Supposons, pour fixer les idées, $u' = v'$. L'équation (2) prouve que le plan diamétral singulier est constamment parallèle au plan fixe qui correspond à l'équation

$$u - v = 0.$$

Montrons maintenant que le plan diamétral singulier coupe la surface suivant une seule droite, à distance finie. A cet effet, considérons les deux équations

$$(3)\quad u^2 - v^2 + 2\,Cx + 2\,C'y + 2\,C''z + D = 0,$$
$$(4)\quad u'(u-v) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Ces égalités donnent, par combinaison,

$$(5)\quad (u+v)(C\alpha + C'\beta + C''\gamma) - u'(2\,Cx + 2\,C'y + 2\,C''z + D) = 0.$$

Les équations (4), (5) représentent deux plans qui donnent, pour l'intersection cherchée, une seule droite à distance finie.

167. Théorème III. *Dans les surfaces de la troisième classe, les plans diamétraux singuliers sont deux plans fixes; ils coupent la surface suivant deux droites rejetées à l'infini.*

Nous supposons, Δ et H étant nuls que la surface proposée est un cylindre elliptique ou hyperbolique. Nous prendrons cette dernière hypothèse pour mieux préciser et pour raisonner sur des coefficients réels.

Soit

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$f(x, y, z) = (ax + by + cz + d)^2 - (a'x + b'y + c'z + d')^2 + h = u^2 - v^2 + h$$

l'équation de la surface et représentons par α, β, γ, les paramètres d'une direction singulière; ces nombres vérifient l'égalité

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = (a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)^2,$$

nous supposerons, pour nous fixer, que

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = a'\alpha + b'\beta + c'\gamma.$$

D'autre part, l'équation du plan diamétral

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

devient

$$\alpha(au - a'v) + \beta(bu - b'v) + \gamma(cu - c'v) = 0,$$

ou

$$u(a\alpha + b\beta + c\gamma) - v(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma) = 0,$$

ou, enfin,

$$u = v.$$

D'ailleurs pour $u = v$ l'équation $f = 0$, se réduit à $h = 0$, et comme h n'est pas nul (si, comme nous le supposons, la surface proposée n'est pas un système de plans) l'intersection est tout entière rejetée à l'infini, dans la direction des plans qui ont pour équation respectivement,

$$u = v, \quad \text{et} \quad u = -v.$$

168. Théorème IV. *Dans les surfaces de la quatrième classe les plans diamétraux singuliers sont rejetés à l'infini.*

La surface est un cylindre parabolique; son équation peut être mise sous la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

$$f(x, y, z) \equiv (ax + by + cz + d)^2 - 2(a'x + b'y + c'z + d') = u^2 - 2v.$$

L'équation du plan diamétral est alors

$$(1) \quad \alpha(au - a') + \beta(bu - b') + \gamma(cu - c') = 0.$$

D'autre part, on a

$$\varphi(x, y, z) \equiv (ax + by + cz)^2$$

et si, comme nous le supposons, α, β, γ, représentent les paramètres d'une direction singulière, nous avons

$$(2) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

l'équation (1) devient donc

$$(3) \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = 0.$$

Le plan diamétral singulier est donc rejeté à l'infini; à moins que les paramètres α, β, γ, ne vérifient à la fois les équations (2) et (3), auquel cas le lieu cherché est indéterminé.

On explique cette singularité en remarquant que les génératrices du cylindre étant parallèles aux plans qui correspondent aux équations

$$u = 0, \quad v = 0,$$

la direction particulière qui est déterminée par les égalités (2) et (3) est précisément celle des génératrices ; et alors, soit que l'on prenne une génératrice elle-même, soit que l'on considère une parallèle à cette génératrice, tout point de la droite peut être envisagé comme étant le milieu d'une corde finie, ou infinie, du cylindre donné.

169. Théorème V. *Dans les surfaces de la cinquième classe le plan diamétral singulier est indéterminé.*

L'équation de la quadrique est, dans ce cas,

$$(ax + by + cz + d)^2 - h = 0$$

et celle du plan diamétral peut s'écrire

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)(ax + by + cz + d) = 0.$$

Si α, β, γ, sont les paramètres d'une direction singulière, on a

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0 ;$$

l'équation du plan diamétral est donc indéterminée.

Cette indétermination s'explique d'ailleurs comme celle que nous avons discutée au paragraphe précédent.

170. Généralisation des surfaces diamétrales. Au lieu de supposer que les cordes d'une surface restent parallèles à une direction fixe, on peut, pour généraliser le problème en question, admettre que ces droites passent constamment par un point fixe M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0), situé à distance finie. Nous allons adopter cette hypothèse et chercher le lieu des milieux de ces cordes, dans les quadriques.

La transversale Δ qui est mobile et qui passe constamment par le point M_0 rencontre la quadrique proposée Q, en

deux points M', M''. Désignons par (x, y, z, t) les cordonnées du point M' et par (x_1, y_1, z_1, t_1), celles du point μ, milieu de M'M''. Nous avons

$$\frac{x}{x_1+\lambda x_0}=\frac{y}{y_1+\lambda y_0}=\frac{z}{z_1+\lambda z_0}=\frac{t}{t_1+\lambda t_0},$$

λ désignant le rapport $\frac{M'\mu}{M'M_0}$. L'équation de Q étant

$$f(x, y, z, t)=0,$$

nous déterminons λ par la relation

$$f(x_1+\lambda x_0,\quad y_1+\lambda y_0,\quad z_1+\lambda z_0,\quad t_1+\lambda t_0)=0,$$

égalité qui peut s'écrire sous la forme suivante

$$f(x_1, y_1, z_1, t_1)+\lambda\left(x_0 f'_{x_1}+y_0 f'_{y_1}+z_0 f'_{z_1}+t_0 f'_{t_1}\right)+\lambda^2 f(x_0, y_0, z_0, t_0)=0,$$

Cette équation en λ a deux racines λ', λ'' qui représentent les rapports

$$\frac{M'\mu}{M'M_0},\ \frac{M''\mu}{M''M_0}.$$

D'ailleurs le point μ étant le milieu de M'M'', la somme des inverses de ces rapports (remarque que nous avons déjà faite (*G. Plane.* § 179) est égale à -2.

Nous avons donc, d'après cette observation,

$$x_0 f'_{x_1}+y_0 f'_{y_1}+z_0 f'_{z_1}+t_0 f'_{t_1}=2f(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

D'autre part, l'identité d'Euler,

$$x_1 f'_{x_1}+y_1 f'_{y_1}+z_1 f'_{z_1}+t_1 f'_{t_1}=2f(x_1, y_1, z_1, t_1),$$

permet d'écrire la relation trouvée sous la forme

$$(x_1-x_0) f'_{x_1}+(y_1-y_0) f'_{y_1}+(z_1-z_0) f'_{z_1}=0.$$

En rendant (x_1, y_1, z_1, t_1) coordonnées courantes, l'équation du lieu est, finalement,

$$(Q) \quad (x - x_0) f'_x + (y - y_0) f'_y + (z - z_0) f'_z = 0.$$

Cette égalité représente une quadrique passant par le point M_0 et par le centre de la quadrique proposée, quand elle possède un pareil point.

En observant que l'on a

$$\frac{1}{2} f'_x = \frac{1}{2} \varphi'_x + C, \quad \frac{1}{2} f'_y = \frac{1}{2} \varphi'_y + C', \quad \frac{1}{2} f'_z = \frac{1}{2} \varphi'_z + C'',$$

et

$$2\varphi = x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z,$$

l'équation obtenue peut s'écrire, encore,

$$\varphi(x, y, z) + U = 0 ;$$

U désignant une forme linéaire. Les équations des quadriques Q et Q' ont donc les mêmes termes du second degré ou, si l'on préfère, les surfaces considérées ont le même cône asymptote.

171. Remarque. Si l'on imagine que le point M_0 s'éloigne à l'infini, dans une direction donnée, direction correspondant aux paramètres directeurs α, β, γ, après avoir posé :

$$\frac{x_0}{\alpha} = \frac{y_0}{\beta} = \frac{z_0}{\gamma} = \rho,$$

l'équation (Q') devient

$$\left(\frac{x}{\rho} - \alpha\right) f'_x + \left(\frac{y}{\rho} - \beta\right) f'_y + \left(\frac{z}{\rho} - \gamma\right) f'_z = 0.$$

En passant à la limite (en supposant $\rho = \infty$), on a

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation du plan diamétral.

EXERCICES

1. *Vérifier que le lieu des milieux des cordes d'une sphère, lorsqu'elles passent par un point fixe, est une sphère.*

2. *On donne deux plans* P *et* Q, *et un point fixe* M_0 ; *par* M_0 *on mène une transversale mobile qui rencontre les plans donnés aux points* A *et* B : *trouver le lieu décrit par le milieu de* AB.

Soient $P = 0$, $Q = 0$, les équations des plans proposés ; on considère l'équation $PQ = 0$ et on lui applique la méthode que nous avons indiquée (§ 170).

3. *On considère la surface qui correspond à l'équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ;$$

par un point M, *mobile sur* OX, *on mène des droites tangentes à la surface et situées respectivement dans les plans* ZOX, XOY. *Soient* A *et* B *les points de contact, trouver le lieu décrit par le milieu de* AB.

On vérifie facilement que la droite AB reste parallèle à une direction fixe.

L'équation générale des plans AMB est

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\sin\varphi = 1 ;$$

La droite AB décrit un cylindre, et le lieu du milieu de AB est une ellipse.

QUATORZIÈME LEÇON

DIAMÈTRES, PLANS, DROITES ET POINTS CONJUGUÉS

172. Théorème. *Lorsqu'on coupe une quadrique* Q, *par un plan* P *qui reste parallèle à un plan fixe, le lieu des centres des sections ainsi obtenues est une droite.*

Soit

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

l'équation du plan fixe donné, celle de P sera

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \lambda,$$

λ désignant un paramètre variable. Ce plan P coupe Q suivant une courbe Γ ; nous désignerons par C le centre de Γ, et par x_1, y_1, z_1, ses coordonnées. Par le point C menons une transversale Δ, dans le plan P, et soient M′ et M″ les points où elle rencontre Q. Les coordonnées x, y, z, de M′ peuvent se calculer par les formules :

$$x = x_1 + a\rho,$$
$$y = y_1 + b\rho,$$
$$z = z_1 + c\rho,$$

a, b, c, désignant les paramètres directeurs de Δ, et ρ la distance CM′.

L'équation de Q étant

$$f(x, y, z) = 0,$$

on a, pour déterminer ρ, l'équation

$$f(x_1, y_1, z_1) + \rho\left(af'_{x_1} + bf'_{y_1} + cf'_{z_1}\right) + \rho^2\varphi(a, b, c) = 0.$$

Les racines ρ', ρ'', de cette équation sont les longueurs CM' et CM'', et comme C est le milieu de M' M'', on a donc

$$(1) \quad af'_{x_1} + bf'_{y_1} + cf'_{z_1} = 0.$$

D'autre part, Δ étant parallèle au plan fixe, on peut écrire l'égalité :

$$(2) \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0.$$

Ceci posé, les paramètres α, β, γ, n'étant pas nuls à la fois, résolvons (2) par rapport à C et nous obtenons, par combinaison avec (1),

$$a\left(\gamma f'_{x_1} - \alpha f'_{z_1}\right) + b\left(\gamma f'_{y_1} - \beta f'_{z_1}\right) = 0.$$

Cette relation doit être vérifiée, quelle que soit la direction de Δ dans le plan P ; par conséquent, quels que soient b et a ; nous avons donc

$$\gamma f'_{x_1} = \alpha f'_{z_1}, \quad \gamma f'_{y_1} = \beta f'_{z_1},$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$\frac{f'_{x_1}}{\alpha} = \frac{f'_{y_1}}{\beta} = \frac{f'_{z_1}}{\gamma}.$$

En considérant x_1, y_1, z_1, comme des coordonnées courantes, on voit que le lieu décrit par le point C est la droite qui correspond aux équations

$$(D) \quad \frac{f'_x}{\alpha} = \frac{f'_y}{\beta} = \frac{f'_z}{\gamma}.$$

173. Étude du diamètre dans les cinq classes. On peut reproduire pour la droite (D) une étude qui offre

la plus grande analogie avec celle que nous avons faite plus haut pour les plans diamétraux, et chercher les particularités affectées par les diamètres dans les quadriques des différentes classes. Nous nous bornerons à énoncer des propriétés que l'on vérifiera sans peine.

1° *Dans les surfaces de la première classe tous les diamètres passent par le centre.*

2° *Dans les paraboloïdes tous les diamètres sont parallèles à une droite fixe.*

3° *Dans les cylindres à base elliptique ou hyperbolique, tous les diamètres sont confondus avec la ligne des centres.*

4° *Dans les cylindres paraboliques, les diamètres sont à l'infini.*

5° *Dans les surfaces de la cinquième classe, qui sont constituées par deux plans parallèles, tous les diamètres sont situés dans le plan parallèle équidistant des plans donnés.*

174. Généralisation des diamètres. Le lieu qui vient de nous occuper est susceptible d'une généralisation toute semblable à celle que nous avons faite, dans la précédente leçon, pour les plans diamétraux. Au lieu d'admettre que les plans mobiles que nous considérons restent parallèles à un plan fixe, c'est-à-dire passent par une droite de l'infini, nous allons supposer qu'ils renferment constamment une droite fixe Δ, située à distance finie, et nous chercherons encore le lieu décrit par les centres des sections ainsi obtenues.

Prenons sur Δ un point fixe $M_1(x_1, y_1, z_1)$; le plan mobile qui passe par Δ, contient ce point M_1 et le centre de la section, point dont nous cherchons le lieu géométrique, a des coordonnées qui vérifient l'équation (§ 170)

$$(1)\quad (x-x_1)f'_x+(y-y_1)f'_y+(z-z_1)f'_z=0.$$

Soit M_2 (x_2, y_2, z_2) un second point de Δ; on a, de même,

$$(2)\quad (x-x_2)f'_x+(y-y_2)f'_y+(z-z_2)f'_z=0.$$

Les équations (1) et (2) donnent, par combinaison,

$$(3)\quad (x_1 - x_2) f'_x + (y_1 - y_2) f'_y + (z_1 - z_2) f'_z = 0.$$

D'après cela, on peut dire que le lieu est la courbe, intersection du plan (3) avec la quadrique qui correspond à l'une des équations (1) ou (2). Ce lieu est donc une courbe du second ordre (§ 26).

175. Remarque. Si les points M_1 et M_2 s'éloignent à l'infini; le premier dans la direction $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, l'autre dans la direction $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$, il est facile de reconnaître que les équations (1) et (2) représentent une droite, ayant pour équations

$$\alpha_1 f'_x + \beta_1 f'_y + \gamma_1 f'_z = 0,$$
$$\alpha_2 f'_x + \beta_2 f'_y + \gamma_2 f'_z = 0;$$

et l'on retombe ainsi sur le cas traité plus haut (§ 172).

176. Droite et plan conjugués. On dit qu'une droite Δ et un plan P ont des directions conjuguées lorsque la droite Δ est parallèle au lieu des centres des sections faites par des plans parallèles à P ; ou bien, lorsque le plan P est parallèle au plan, lieu des milieux des cordes parallèles à Δ.

Nous allons montrer qu'il est indifférent d'adopter l'une ou l'autre de ces définitions.

Prenons d'abord la première définition et proposons-nous d'exprimer que la droite Δ dont les équations sont

$$(\Delta)\quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

est parallèle au diamètre Δ', lieu des centres des sections faites dans une quadrique par le plan qui correspond à l'équation

$$(P)\quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$

Les équations de Δ' sont

$$\frac{f'_x}{\alpha'} = \frac{f'_y}{\beta'} = \frac{f'_z}{\gamma'},$$

et celles d'une parallèle à Δ', menée par l'origine,

$$(1) \qquad \frac{\varphi'_x}{\alpha'} = \frac{\varphi'_y}{\beta'} = \frac{\varphi'_z}{\gamma'}.$$

Les droites Δ et Δ' étant parallèles, ces équations représentent une droite qui n'est autre que Δ, et l'on peut dire qu'elles sont vérifiées par les coordonnées α, β, γ.

Les conditions cherchées sont donc :

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha'} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta'} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma'}.$$

Adoptons maintenant la seconde définition ; le plan qui partage en deux parties égales les cordes parallèles à Δ a pour équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0.$$

L'équation

$$\alpha \varphi'_x + \beta \varphi'_y + \gamma \varphi'_z = 0,$$

ou la suivante

$$x\varphi'_\alpha + y\varphi'_\beta + z\varphi'_\gamma = 0,$$

représente donc le plan P et l'on a

$$\frac{\varphi'_\alpha}{\alpha'} = \frac{\varphi'_\beta}{\beta'} = \frac{\varphi'_\gamma}{\gamma'}.$$

On retrouve bien les relations (1). Ainsi, l'idée d'un plan et d'une droite ayant des directions conjuguées correspond, indifféremment, à l'une ou à l'autre des deux définitions que nous avons données.

177. Droites conjuguées. On dit que deux droites Δ, Δ', ont des directions conjuguées lorsque Δ est parallèle au plan P′ qui partage en deux parties égales les cordes parallèles à Δ'; ou bien, lorsque Δ' est parallèle au plan P qui partage en deux parties égales les cordes parallèles à Δ.

Ici, encore, nous allons montrer que ces deux définitions rentrent l'une dans l'autre.

Soient

$$(\Delta)\quad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\qquad (\Delta')\quad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'},$$

les équations des droites proposées. Le plan P′ a pour équation

$$(\mathrm{P}')\quad \alpha' f'_x+\beta' f'_y+\gamma' f'_z=0;$$

et l'on peut dire que l'égalité

$$\alpha'\varphi'_x+\beta'\varphi'_y+\gamma'\varphi'_z=0,$$

représente un plan P″, mené par l'origine, et parallèle à P′. Ce plan P″ doit donc renfermer Δ, et l'on a

$$(1)\quad \alpha'\varphi'_\alpha+\beta'\varphi'_\beta+\gamma'\varphi'_\gamma=0.$$

En adoptant la seconde définition, on eût trouvé

$$(1')\quad \alpha\varphi'_{\alpha'}+\beta\varphi'_{\beta'}+\gamma\varphi'_{\gamma'}=0.$$

Les conditions (1) et (1′) sont identiques, et ceci résulte, comme l'on sait, de l'identité

$$x\varphi'_X+y\varphi'_Y+z\varphi'_Z\equiv X\varphi'_x+Y\varphi'_y+Z\varphi'_z.$$

178. Plans conjugués. On dit que deux plans P et P′ ont des directions conjuguées, lorsque le plan P est parallèle au diamètre conjugué de P; ou bien, lorsque P′ est parallèle au diamètre conjugué de P.

Ces deux propriétés sont identiques.

Soient

$$(P) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \qquad (P') \quad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$

les équations des plans donnés. Les équations

$$(\Delta) \quad \frac{f'_x}{\alpha'} = \frac{f'_y}{\beta'} = \frac{f'_z}{\gamma'},$$

représentent le diamètre Δ' conjugué de P′ et si, par l'origine, on mène à cette droite une parallèle δ', ses équations seront :

$$(\delta') \quad \frac{\varphi'_x}{\alpha'} = \frac{\varphi'_y}{\beta'} = \frac{\varphi'_z}{\gamma'} = -\lambda,$$

— λ désignant la valeur commune de ces rapports.

Donnons aux équations précédentes la forme explicite et nous avons

$$(1) \quad \begin{cases} Ax + B''y + B'z + \alpha'\lambda = 0, \\ B''x + A'y + Bz + \beta'\lambda = 0, \\ B'x + By + A''z + \gamma'\lambda = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs, la droite δ' devant être située dans le plan P, nous avons aussi

$$(2) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

x, y, z, représentant dans (1) et (2) les coordonnées d'un point de δ'. Les relations (1) et (2) sont donc vérifiées par des valeurs des inconnues (x, y, z, λ) qui ne sont pas toutes nulles, et la condition cherchée est

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha' \\ B'' & A' & B & \beta' \\ B' & B & A'' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En observant que l'on peut intervertir les lignes en colonnes, on a

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha' \\ B'' & A' & B & \beta' \\ B' & B & A'' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \beta \\ B' & B & A'' & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 \end{vmatrix},$$

et cette remarque prouve que l'on peut adopter, indifféremment, l'une ou l'autre des définitions que nous avons données pour exprimer que deux plans ont des directions conjuguées.

179. Théorème. *Le plan tangent* P, *en un point* M *d'une quadrique, est conjugué du diamètre qui passe par ce point.*

Soient (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de M; l'équation de P est

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} + tf'_{t_0} = 0.$$

Le diamètre conjugué de ce plan correspond aux équations

$$\frac{f'_x}{f'_{x_0}} = \frac{f'_y}{f'_{y_0}} = \frac{f'_z}{f'_{z_0}},$$

et celles-ci sont visiblement vérifiées par $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

180. Diamètres conjugués. Lorsque deux droites ayant des directions conjuguées passent par le centre C de la quadrique, l'ensemble de ces droites constitue *un système de deux diamètres conjugués.*

Si trois droites partant du centre sont telles que deux quelconques d'entre elles forment un système de deux diamètres conjugués, nous dirons que les droites proposées forment *un système triplement conjugué.*

181. Théorème. *Lorsqu'on coupe une quadrique par un plan* P *passant par le centre, deux diamètres conjugués de la section obtenue, forment un système de deux diamètres conjugués de la quadrique; et réciproquement.*

Soit O le centre de la quadrique Q; la section obtenue par un plan P passant par O est une courbe du second ordre et le point O est évidemment le centre de cette section Σ. Soient OA et OB deux diamètres conjugués de Σ; si, dans le plan P, nous menons une corde MN parallèle à OA, elle sera partagée par OB en deux parties égales. La droite OB

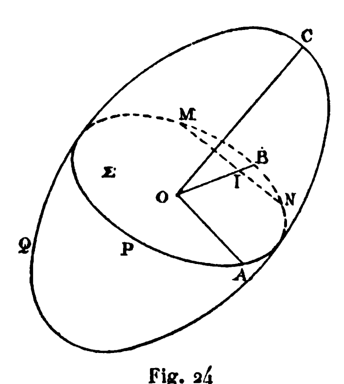


Fig. 24

est donc située dans le plan diamétral, conjugué des cordes parallèles à OA. Les droites OA et OB ayant, d'après cela, des directions conjuguées et passant par le centre de Q, sont deux diamètres conjugués de cette quadrique.

Des considérations géométriques analogues établissent la réciproque qui, comme la proposition directe, peut aussi se démontrer très simplement par l'analyse.

182. Théorème. *Dans une quadrique à centre il y a une infinité de trièdres dont les arêtes forment un système triplement conjugué.*

Coupons la surface Q par un plan P passant par le centre et soient OA et OB deux diamètres conjugués de cette section. Si nous considérons la droite OC qui est le diamètre conjugué des plans parallèles à P, cette droite OC est un diamètre conjugué de tous les diamètres de P et, en particulier,

de OA et de OB. Le système (OABC) est donc triplement conjugué.

Si l'on observe 1° que P est un plan arbitrairement choisi et assujetti seulement à passer par le centre ; 2° que OA et OB sont deux diamètres conjugués quelconques de la section; on reconnaît qu'il existe une infinité de trièdres dont les arêtes forment un système de diamètres deux à deux conjugués.

La méthode que nous avons exposée plus haut (§ 135) et qui consiste à décomposer le premier membre de l'équation donnée en carrés et à prendre pour nouveaux plans de coordonnées ceux qui correspondent aux formes linéaires qui sont ainsi mises en évidence, donne des axes qui constituent, précisément, un système triplement conjugué. Nous avons vu en Algèbre que cette décomposition en carrés, avec des formes indépendantes, pouvait se faire d'une infinité de façons différentes, et cette remarque démontre encore le théorème en question.

183. Points conjugués. Lorsque trois points M′,M″,M‴, situés sur une quadrique de centre O, sont tels que le trièdre O M′M″M‴ soit triplement conjugué, nous dirons que ces points sont conjugués.

Il existe entre les coordonnées de ces points des relations remarquables que nous établirons ici.

Nous supposerons, explicitement, que la surface considérée soit un ellipsoïde et nous rapporterons cette surface à trois diamètres conjugués. En désignant par a', b', c', les longueurs de ces diamètres, l'équation de la surface est

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

soient x', y', z',; x'', y'', z''; x''', y''', z'''; les coordonnées des points conjugués considérés. Le plan tangent au point M′ étant conjugué du diamètre OM′ (§ 179), nous pouvons dire qu'il est parallèle au plan M″OM‴, et cette remarque appliquée

aux trois points M′, M″, M‴, donne les relations suivantes :

$$(\mathrm{H})\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{x'x''}{a'^2}+\frac{y'y''}{b'^2}+\frac{z'z''}{c'^2}=1,\\&\frac{x''x'''}{a'^2}+\frac{y''y'''}{b'^2}+\frac{z''z'''}{c'^2}=1,\\&\frac{x'''x'}{a'^2}+\frac{y'''y'}{b'^2}+\frac{z'''z'}{c'^2}=1.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, les points conjugués étant situés sur la quadrique, on a

$$(\mathrm{K})\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1,\\&\frac{x''^2}{a'^2}+\frac{y''^2}{b'^2}+\frac{z''^2}{c'^2}=1,\\&\frac{x'''^2}{a'^2}+\frac{y'''^2}{b'^2}+\frac{z'''^2}{c'^2}=1.\end{aligned}\right.$$

Les égalités (H) et (K) conduisent, par une transformation algébrique, à d'autres relations qui, en raison de leur grande simplicité, doivent être connues.

Prenons les formules de transformation suivantes :

$$\frac{x'}{a'}=\mathrm{X}',\quad \frac{y'}{b'}=\mathrm{Y}',\quad \frac{z'}{c'}=\mathrm{Z}';$$
$$\frac{x''}{a'}=\mathrm{X}'',\quad \frac{y''}{b'}=\mathrm{Y}'',\quad \frac{z''}{c'}=\mathrm{Z}'';$$
$$\frac{x'''}{a'}=\mathrm{X}''',\quad \frac{y'''}{b'}=\mathrm{Y}''',\quad \frac{z'''}{c'}=\mathrm{Z}'''.$$

Les formules (H) et (K) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}&\mathrm{X'X''}+\mathrm{Y'Y''}+\mathrm{Z'Z''}=0, &&\mathrm{X}'^2+\mathrm{Y}'^2+\mathrm{Z}'^2=1,\\&\mathrm{X''X'''}+\mathrm{Y''Y'''}+\mathrm{Z''Z'''}=0, &&\mathrm{X}''^2+\mathrm{Y}''^2+\mathrm{Z}''^2=1,\\&\mathrm{X'''X'}+\mathrm{Y'''Y'}+\mathrm{Z'''Z'}=0; &&\mathrm{X}'''^2+\mathrm{Y}'''^2+\mathrm{Z}'''^2=1.\end{aligned}$$

Si l'on compare ces égalités avec les relations (α) et (β) trouvées précédemment (§ 21), on en déduit les relations

suivantes, analogues aux égalités (α') et (β') du paragraphe cité,

$$X'^2 + X''^2 + X'''^2 = 1, \qquad X'Y' + X''Y'' + X'''Y''' = 0,$$
$$Y'^2 + Y''^2 + Y'''^2 = 1, \qquad Y'Z' + Y''Z'' + Y'''Z''' = 0,$$
$$Z'^2 + Z''^2 + Z'''^2 = 1, \qquad Z'X' + Z''X'' + Z'''X''' = 0.$$

En revenant à la notation primitive, nous avons

$$x'^2 + x''^2 + x'''^2 = a'^2, \qquad x'y' + x''y'' + x'''y''' = 0,$$
$$y'^2 + y''^2 + y'''^2 = b'^2, \qquad y'z' + y''z'' + y'''z''' = 0,$$
$$z'^2 + z''^2 + z'''^2 = c'^2. \qquad z'x' + z''x'' + z'''x''' = 0.$$

Telles sont les relations que nous avions en vue; elles conduisent à des conséquences diverses et intéressantes parmi lesquelles nous signalerons la démonstration des théorèmes d'Apollonius. Mais nous reviendrons plus loin (Leç. 22) sur cette application.

EXERCICES

1. *Démontrer que les plans tangents en trois points conjugués se coupent en un point dont le lieu géométrique est une quadrique.*

L'équation de la quadrique donnée étant

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1,$$

les équations suivantes

$$\frac{xx'}{a'^2} + \frac{yy'}{b'^2} + \frac{zz'}{c'^2} = 1, \quad \frac{xx''}{a'^2} + \frac{yy''}{b'^2} + \frac{zz''}{c'^2} = 1, \quad \frac{xx'''}{a'^2} + \frac{yy'''}{b'^2} + \frac{zz'''}{c'^2} = 1,$$

représentent les trois plans tangents considérés. On voit d'ailleurs, en considérant le parallélipipède construit avec les trois diamètres conjugués, que

$$x' + x'' + x''' = x, \quad y' + y'' + y''' = y, \quad z' + z'' + z''' = z;$$

x, y, z, désignant les coordonnées du point dont on cherche le lieu géométrique. L'équation de ce lieu est donc

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=3.$$

2. *Trouver la condition que doivent remplir les coefficients* M, N, P, *pour que l'équation*

$$M\frac{x}{a'}+N\frac{y}{b'}+P\frac{z}{c'}=1,$$

représente un plan passant par trois points conjugués de la quadrique qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

On trouvera la relation

$$M^2+N^2+P^2=3.$$

3. *Trouver l'enveloppe des plans qui passent par trois points conjugués.*

4. *Démontrer que le lieu des centres des sections faites dans une quadrique par les plans qui passent par trois points conjugués de cette surface a pour équation*

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=\frac{1}{3}.$$

5. *Démontrer que si l'équation*

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy=0,$$

représente un cône capable d'un trièdre triplement conjugué de la quadrique qui correspond à l'équation

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1,$$

on a

$$Aa'^2+A'b'^2+A''c'^2=0.$$

Cette condition est nécessaire et suffisante.

6. *On considère trois axes rectangulaires et les équations suivantes*

$$mx^2+ny^2+pz^2=1,\qquad x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0;$$

Cette dernière représente une sphère et le plan tangent à cette surface, coupe la quadrique qui correspond à la première équation suivant une courbe γ ; *trouver le lieu décrit par le centre de* γ.

On prendra l'équation générale des plans P qui sont tangents à la sphère, et l'on considérera le centre de γ comme étant placé à l'intersection de P et du diamètre conjugué.

QUINZIÈME LEÇON

ÉTUDE ALGÉBRIQUE DE L'ÉQUATION EN $\mathfrak{S}$

Nous arrivons maintenant à la recherche des directions conjuguées rectangulaires qu'on nomme, plus brièvement, *directions principales.* Mais cette recherche repose sur une équation fondamentale que nous avons déjà rencontrée, lorsque nous nous sommes occupés d'établir les conditions que doivent vérifier les coefficients de l'équation d'une quadrique de révolution. Nous nous proposons de faire d'abord l'étude algébrique de cette équation, dite *équation en* $\mathfrak{S}$.

184. Définition de l'équation en $\mathfrak{S}$. Imaginons une forme quadratique ternaire φ, dont les coefficients sont quelconques; posons, comme toujours,

$$\varphi(x,y,z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

et considérons la forme quadratique particulière V,

$$V \equiv x^2 + y^2 + z^2.$$

Alors $\varphi - \mathfrak{S}V$ représente une forme ternaire, et si l'on détermine $\mathfrak{S}$ de façon que le discriminant de cette forme soit nul, l'équation qui détermine l'inconnue $\mathfrak{S}$ est l'équation en $\mathfrak{S}$ qui correspond à la forme φ.

Nous avons supposé, dans la définition précédente, que les axes étaient rectangulaires; si les axes sont obliques, on doit remplacer la forme V par v,

$$v \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu.$$

D'après cela, l'équation en $\mathbf{S}$ que nous allons considérer est

$$\Delta(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} A-\mathbf{S} & B'' & B' \\ B'' & A'-\mathbf{S} & B \\ B' & B & A''-\mathbf{S} \end{vmatrix} = 0,$$

si les axes de coordonnées sont rectangulaires; ou, dans le cas des axes obliques,

$$\delta(\mathbf{S}) = \begin{vmatrix} A-\mathbf{S} & B''-\mathbf{S}\cos\nu & B'-\mathbf{S}\cos\mu \\ B''-\mathbf{S}\cos\nu & A'-\mathbf{S} & B-\mathbf{S}\cos\lambda \\ B'-\mathbf{S}\cos\mu & B-\mathbf{S}\cos\lambda & A''-\mathbf{S} \end{vmatrix} = 0.$$

Nous allons étudier ces équations [1].

185. Théorème I. *Les racines de l'équation en* $\mathbf{S}$ *sont réelles.*

Supposons en effet que l'équation

$$\delta(\mathbf{S}) = 0,$$

admette une racine imaginaire $\alpha+\beta i$; la forme quadratique ψ,

$$\psi = \varphi - (\alpha+\beta i)(x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu),$$

ayant son discriminant nul, est décomposable en deux carrés et, en désignant par A, B, A', B', des formes linéaires des lettres x, y, z, on peut poser

$$\psi = (A+A'i)^2 + (B+B'i)^2.$$

En égalant, dans les deux membres, les coefficients de i, on obtient le résultat suivant :

$$(1) \quad -\beta(x^2+y^2+z^2+2yz\cos\lambda+2zx\cos\mu+2xy\cos\nu) = 2(AA'+BB').$$

1. On peut imaginer des équations en $\mathbf{S}$ d'un degré quelconque, et la plupart des propriétés que nous allons établir, conviennent à toutes ces équations. Cette étude générale a été faite par M. Walecki (*Nouvelles annales*, 1882 ; p. 401 et 556) mais nous pensons devoir nous borner ici à celle de l'équation du troisième degré qui doit, seule, nous intéresser dans ce cours.

Si l'on considère maintenant les égalités

$$A = 0, \quad B = 0,$$

elles représentent deux équations, linéaires et homogènes en x, y, z; elles admettent donc une infinité de solutions non nulles. Imaginons l'une d'elles (x', y', z'); et soit M' le point qui correspond à ces coordonnées; comme nous avons

$$\overline{OM'}^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2y'z' \cos\lambda + 2z'x' \cos\mu + 2x'y' \cos\lambda,$$

la relation (1) devient

$$-\beta \overline{OM'}^2 = 0 ;$$

par conséquent β est nul [1].

186. Théorème II. *Deux racines distinctes de l'équation en $\mathbf{S}$ donnent deux décompositions d'espèces différentes* [2].

Soient $\mathbf{S}'$ et $\mathbf{S}''$ deux racines distinctes de l'équation en $\mathbf{S}$; on a

$$(1) \quad \varphi - \mathbf{S}'\upsilon = \varepsilon P^2 + \varepsilon' Q^2 \quad (\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon' = \pm 1)$$

et il faut montrer qu'on ne peut pas avoir

$$(2) \quad \varphi - \mathbf{S}''\upsilon = \varepsilon R^2 + \varepsilon' T^2$$

En effet ces deux égalités donnent :

$$(3) \quad (\mathbf{S}' - \mathbf{S}'')\, \upsilon = \varepsilon (R^2 - P^2) + \varepsilon' (T^2 - Q^2).$$

Considérons les deux équations

$$R + P = 0, \quad T + Q = 0;$$

elles sont linéaires et homogènes par rapport aux lettres

1. Cette démonstration est due à M. Walecki ; voyez *Nouvelles annales*, loc., cit.

2. On dit que deux décompositions sont de même espèce lorsqu'elles renferment le même nombre de carrés affectés du signe $+$, et le même nombre de carrés affectés du signe $-$. Cette dénomination est due à M. Hermite.

x, y, z; elles admettent donc une infinité de solutions non nulles. Pour chacune d'elles, le second membre de (3) s'annule, mais le premier membre prend une valeur différente de zéro; si, comme nous le supposons, les racines $\mathbf{s}'$ et $\mathbf{s}''$ sont distinctes. Les identités (1) et (2) sont donc incompatibles.

Nous allons d'ailleurs préciser la propriété que nous venons d'établir, en montrant quelle est l'espèce de décomposition qui appartient à chacune des racines de l'équation en $\mathbf{s}$.

187. Théorème III. *La plus petite racine de l'équation en $\mathbf{s}$ donne deux carrés précédés du signe* + [1]*; la plus grande, deux carrés affectés du signe —; enfin, la racine moyenne donne une différence de deux carrés.*

Désignons par $\mathbf{s}'$ $\mathbf{s}''$ $\mathbf{s}'''$ les trois racines de l'équation $\delta(\mathbf{s}) = 0$; à chacune d'elles correspond une décomposition de la forme quadratique $\varphi - \mathbf{s}v$, en deux carrés; et ces trois décompositions étant d'espèces différentes, nous devons trouver: ou deux carrés positifs, ou deux carrés de signes contraires, ou enfin deux carrés négatifs. Posons donc

$$\varphi - \mathbf{s}'v \equiv P_1^2 + Q_1^2,$$
$$\varphi - \mathbf{s}''v \equiv P_2^2 - Q_2^2,$$
$$\varphi - \mathbf{s}'''v \equiv - P_3^2 - Q_3^2.$$

Les deux premières donnent

$$(\mathbf{s}'' - \mathbf{s}')\, v \equiv P_1^2 + Q_1^2 + Q_2^2 - P_2^2.$$

Considérons les solutions non nulles (lesquelles sont en nombre infini) de l'équation $P_2 = 0$; le premier membre a un signe constant, celui de $\mathbf{s}'' - \mathbf{s}'$; d'ailleurs, le second membre est évidemment positif, pour toutes les solutions que nous considérons; nous avons donc

$$\mathbf{s}'' - \mathbf{s}' > 0.$$

1. On dit aussi, par abréviation, *carrés positifs*; de même, l'expression *carrés négatifs* est employée pour exprimer des carrés précédés du signe —.

Le même raisonnement appliqué à l'identité :

$$(\mathbf{S}''' - \mathbf{S}'')\, v = P_2^2 + P_3^2 + Q_3^2 - Q_2^2,$$

prouve que $\mathbf{S}''' - \mathbf{S}''$ est positif. En résumé, nous avons :

$$\mathbf{S}''' > \mathbf{S}'' > \mathbf{S}',$$

et la proposition énoncée se trouve établie.

Nous allons maintenant nous occuper, plus particulièrement, de l'équation $\Delta(\mathbf{S}) = 0$.

188. Théorème IV. *Lorsque l'équation* $\Delta(\mathbf{S}) = 0$, *admet une racine double, tous les mineurs du second ordre du déterminant* $\Delta(\mathbf{S})$ *sont nuls.*

Cette condition est nécessaire et suffisante.

Le déterminant $\Delta(\mathbf{S})$ est symétrique ; il possède donc seulement six mineurs du second ordre ; trois mineurs principaux [1].

$$\lambda = \begin{vmatrix} A' - \mathbf{S} & B \\ B & A'' - \mathbf{S} \end{vmatrix}, \quad \lambda' = \begin{vmatrix} A'' - \mathbf{S} & B' \\ B' & A - \mathbf{S} \end{vmatrix}, \quad \lambda'' = \begin{vmatrix} A - \mathbf{S} & B'' \\ B'' & A' - \mathbf{S} \end{vmatrix};$$

et trois mineurs, non principaux,

$$6 = \begin{vmatrix} A - \mathbf{S} & B' \\ B'' & B \end{vmatrix}, \quad 6' = \begin{vmatrix} A' - \mathbf{S} & B'' \\ B & B' \end{vmatrix}, \quad 6'' = \begin{vmatrix} A'' - \mathbf{S} & B \\ B' & B'' \end{vmatrix}.$$

On a, d'ailleurs,

$$(1) \qquad -\Delta'(\mathbf{S}) = \lambda + \lambda' + \lambda''.$$

Si le nombre $\mathbf{S}'$ annule : 1° $\Delta(\mathbf{S})$, 2° tous ses mineurs ; $\mathbf{S}'$ est racine de $\Delta(\mathbf{S})$ et de sa dérivée ; $\mathbf{S}'$ est donc une racine multiple de l'équation $\Delta(\mathbf{S}) = 0$.

Pour établir la réciproque, considérons le déterminant D, déterminant adjoint de $\Delta(\mathbf{S})$,

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 6'' & 6' \\ 6'' & \lambda' & 6 \\ 6' & 6 & \lambda'' \end{vmatrix}.$$

1. Nous rappelons que les mineurs principaux sont ceux que l'on obtient en supprimant dans le déterminant proposé un même nombre de lignes et de colonnes affectées des mêmes indices (*Alg.*, p. 652).

Nous savons (*Alg.*, p. 656) que tous les mineurs de D sont nuls, si $\Delta(\mathbf{s}) = 0$. Nous avons donc

$$(2) \quad \lambda\lambda' - \beta''^2 = 0, \quad \lambda'\lambda'' - \beta^2 = 0, \quad \lambda''\lambda - \beta'^2 = 0.$$

Ces égalités prouvent que les mineurs $\lambda, \lambda', \lambda''$ ont le même signe; et si nous supposons $\Delta'(\mathbf{s}) = 0$, l'égalité (1) donne

$$\lambda + \lambda' + \lambda'' = 0,$$

et, par suite,

$$\lambda = 0, \quad \lambda' = 0, \quad \lambda'' = 0.$$

Les relations (2) donnent alors

$$\beta = 0, \quad \beta' = 0, \quad \beta'' = 0;$$

ainsi, les six mineurs du second ordre sont nuls.

189. Remarque I. Lorsque l'équation en $\mathbf{s}$ a une racine double, si les coefficients B, B′, B″ sont différents de zéro, les nombres de Jacobi (§ 122) sont égaux, et leur valeur commune représente la racine double.

Si l'on suppose, au contraire, que l'un des coefficients B, B′, ou B″, soit nul; on voit (les mineurs β, β', β'', étant nuls) qu'un autre de ces coefficients doit être nul. En supposant $B' = B'' = 0$, la racine double est égale à A, et les six relations

$$\lambda = \lambda' = \lambda'' = 0, \quad \beta = \beta' = \beta'' = 0,$$

se réduisent à la suivante

$$B^2 = (A - A')(A - A'').$$

190. Remarque II. Lorsque l'équation en $\mathbf{s}$ admet une racine double $\mathbf{s}'$, la forme

$$\varphi - \mathbf{s}'(x^2 + y^2 + z^2),$$

est un carré parfait.

En effet, tous les mineurs du second ordre du discriminant

qui correspond à cette forme quadratique sont nuls; cette circonstance prouve que celle-ci est un carré parfait. (*Alg.*, § 353.)

191. Théorème. *L'équation* $\Delta(S) = 0$, *n'a jamais trois racines nulles.*

En développant le déterminant $\Delta(S)$ nous mettons l'équation en S sous la forme :

$$(6) \quad S^3 - (A + A' + A'')S^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)S - (AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2) = 0.$$

ou,

$$S^3 - IS^2 + JS - \Delta = 0,$$

en posant

$$I = A + A' + A'',$$
$$J = AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2.$$

Dans l'équation (6), Δ a d'ailleurs sa signification ordinaire; il représente le discriminant de la forme φ.

Si l'équation en S avait ses trois racines nulles, on aurait, entre autres conséquences,

$$I = 0, \quad et \quad J = 0;$$

et, par suite,

$$I^2 - 2J = 0,$$

ou

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + 2B''^2 = 0.$$

Mais alors φ serait idéntiquement nul, ce que nous ne supposons pas.

192. Théorème. *Lorsque l'équation* $\Delta(S) = 0$ *a trois racines égales, on a*

$$A = A' = A'', \quad et \quad B = B' = B'' = 0.$$

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Les conditions énoncées sont évidemment suffisantes; car, en les supposant vérifiées, l'équation en $\mathfrak{S}$ s'écrit

$$(\mathfrak{S} - A)^3 = 0\,;$$

mais il faut montrer, ce qui est un point plus délicat, qu'elles sont nécessaires.

On a, en effet,

$$\frac{1}{2}\Delta''(\mathfrak{S}) = (A - \mathfrak{S}) + (A' - \mathfrak{S}) + (A'' - \mathfrak{S})$$

Nous avons vu d'ailleurs (§ 188) que l'équation en $\mathfrak{S}$ ne pouvait avoir une racine double, et, *à fortiori*, une racine triple, que si les égalités (2) (§ 188), étaient vérifiées. Ces relations prouvent que les nombres $(A - \mathfrak{S})$ $(A' - \mathfrak{S})$, $(A'' - \mathfrak{S})$, ont le même signe; leur somme ne peut être égale à zéro, que si chacune de ces quantités est nulle.

D'ailleurs, si l'on a

$$\mathfrak{S} = A = A' = A'',$$

on a aussi, d'après les égalités (2),

$$B = B' = B'' = 0.$$

192 *bis*. Mais on peut trouver, plus directement, ces relations en raisonnant comme nous allons le faire. Soient a la racine triple, nous aurons alors (*Alg.*, § 373)

$$I = 3a, \quad \text{et} \quad J = 3a^2.$$

Éliminons a entre ces deux égalités, nous obtenons

$$I^2 - 3J = 0,$$

ou

$$A^2 + A'^2 + A''^2 - AA' - AA'' - A'A'' + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0,$$

ou encore

$$\frac{1}{2}(A - A')^2 + \frac{1}{2}(A' - A'')^2 + \frac{1}{2}(A'' - A)^2 + 3B^2 + 3B'^2 + 3B''^2 = 0.$$

Cette égalité entraîne les suivantes :

$$A = A' = A'', \quad B = B' = B'' = 0.$$

193. Séparation des racines. — (Méthode de Jacobi). *Lorsque les coefficients* B, B′, B″, *sont différents de zéro, les mineurs (non principaux) égalés à zéro donnent pour* $\mathbf{S}$, *trois nombres qui séparent deux racines de l'équation* $\Delta(\mathbf{S}) = 0$.

Les nombres que nous allons considérer, nombres que nous avons déjà rencontrés (§122 et 189), et que nous avons nommés *nombres de Jacobi,* sont

$$\alpha = A - \frac{B'B''}{B}, \quad \alpha' = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad \alpha'' = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

En introduisant ces nombres dans l'équation en $\mathbf{S}$, celle-ci s'écrit,

$$\Delta(\mathbf{S}) = -\left(\mathbf{S} - \alpha + \frac{B'B''}{B}\right)\left(\mathbf{S} - \alpha' + \frac{BB''}{B'}\right)\left(\mathbf{S} - \alpha'' + \frac{BB'}{B''}\right) + 2BB'B''$$
$$+ B^2\left(\mathbf{S} - \alpha + \frac{B'B''}{B}\right) + B'^2\left(\mathbf{S} - \alpha' + \frac{BB''}{B'}\right) + B''^2\left(\mathbf{S} - \alpha'' + \frac{BB'}{B''}\right) = 0,$$

ou, après réduction,

$$\Delta(\mathbf{S}) = -(\mathbf{S} - \alpha)(\mathbf{S} - \alpha')(\mathbf{S} - \alpha'')$$
$$+ BB'B''\left\{\frac{(\mathbf{S} - \alpha')(\mathbf{S} - \alpha'')}{B^2} + \frac{(\mathbf{S} - \alpha'')(\mathbf{S} - \alpha)}{B'^2} + \frac{(\mathbf{S} - \alpha)(\mathbf{S} - \alpha')}{B''^2}\right\} = 0.$$

Telle est la forme remarquable affectée par l'équation en $\mathbf{S}$, quand on effectue la transformation indiquée par Jacobi.

On déduit de l'équation précédente :

$$\Delta(\alpha) = BB'B''\frac{(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'')}{B^2},$$
$$\Delta(\alpha') = BB'B''\frac{(\alpha' - \alpha)(\alpha' - \alpha'')}{B'^2},$$
$$\Delta(\alpha'') = BB'B''\frac{(\alpha'' - \alpha)(\alpha'' - \alpha')}{B''^2},$$

Ces relations donnent lieu aux remarques suivantes.

1° Dans le cas général, en supposant

$$\alpha < \alpha' < \alpha'', \quad \text{et} \quad BB'B'' > 0;$$

on a

$$\Delta(\alpha) > 0, \quad \Delta(\alpha') < 0, \quad \Delta(\alpha'') > 0.$$

Il y a donc *une* racine entre α et α'; *une* autre entre α' et α''. Quant à la troisième, elle est comprise entre α'' et $+\infty$. Cette conclusion subsiste quand $BB'B''$ est négatif, il faut seulement observer que la troisième racine, au lieu d'appartenir à l'intervalle $(\alpha'', +\infty)$ est alors située dans l'intervalle $(-\infty, \alpha)$.

2° Si deux des nombres de Jacobi sont égaux, si l'on a $\alpha = \alpha'$, l'une des racines de l'équation en $\mathbf{S}$ est justement égale à cette valeur commune. C'est un cas particulier remarquable, l'équation en $\mathbf{S}$ étant alors décomposable en deux facteurs rationnels.

D'ailleurs, la suite

$$-\infty \quad \alpha \quad \alpha'' \quad +\infty$$

sépare encore les deux autres racines.

3° Si les trois nombres de Jacobi sont égaux, l'équation en $\mathbf{S}$ admet une racine double et s'écrit

$$-(\mathbf{S}-\alpha)^2\left\{\mathbf{S}-\alpha-BB'B''\left(\frac{1}{B^2}+\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{B''^2}\right)\right\}=0.$$

On observera que la discussion précédente prouve que, dans le cas général, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en $\mathbf{S}$ ait une racine double sont :

$$\alpha = \alpha' = \alpha'';$$

résultat que nous avons trouvé déjà, par une voie différente.

194. Examen du cas particulier où l'on suppose $BB'B'' = 0$. La méthode de Jacobi est en défaut dans le cas où le produit $BB'B''$ est nul; mais il est facile de séparer les racines de l'équation en $\mathbf{S}$, dans cette hypothèse particulière.

Supposons d'abord que nous ayons

$$B'' = 0, \quad \text{et} \quad BB' \neq 0;$$

l'équation en S s'écrit alors

$$(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B'^2 - (A' - S)B^2 = 0.$$

Si la différence $A - A'$ n'est pas nulle et si, pour fixer les idées on suppose $A < A'$, l'équation précédente a ses trois racines réelles et séparées par la suite.

$$-\infty, \quad A, \quad A', \quad +\infty.$$

Si, au contraire, on a $A = A'$; le nombre A vérifie l'équation en S et les deux autres racines sont données par l'équation

$$(A' - S)(A'' - S) - B'^2 - B^2 = 0.$$

Ces racines sont séparées par la suite

$$(1) \quad -\infty, \quad A' \text{ ou } A'', \quad \text{et } +\infty.$$

Admettons maintenant que B' et B'' soient nuls, simultanément B; étant différent de zéro.

L'équation en S devient

$$(A - S)\left\{(A' - S)(A'' - S) - B^2\right\} = 0.$$

Ainsi A est encore une racine de l'équation et, comme dans le cas précédent, les deux autres racines sont séparées par la suite (1).

Enfin si l'on a

$$B = B' = B'' = 0,$$

les trois racines sont: A, A' et A''.

195. Séparation des racines. — (Méthode de Cauchy.) *Si l'on considère un des mineurs principaux de $\Delta(S)$, ce mineur égalé à zéro admet toujours deux racines réelles α, β, $(\alpha < \beta)$; et la suite :*

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad +\infty,$$

sépare les racines de l'équation en S.

L'équation en $\mathfrak{S}$ peut s'écrire

$$(1)\quad \Delta(\mathfrak{S}) = (A - \mathfrak{S})\left\{(A' - \mathfrak{S})(A'' - \mathfrak{S}) - B^2\right\} + 2BB'B'' \\ - (A' - \mathfrak{S})B'^2 - (A'' - \mathfrak{S})B''^2 = 0.$$

Considérons l'équation

$$(2)\quad (A' - \mathfrak{S})(A'' - \mathfrak{S}) - B^2 = 0,$$

équation qui a ses racines réelles distinctes. En effet, elles sont séparées par la suite :

$$-\infty, \quad A' \text{ ou } A'', \quad \text{et} + \infty,$$

et elles ne peuvent être égales que si la différence $A' - A''$ est nulle et si, en outre, chacune d'elles a la valeur A'. On doit donc avoir $B = 0$, et l'on retombe dans l'un des cas particuliers que nous avons examinés tout à l'heure.

Supposons donc que les racines α, β, $(\alpha < \beta)$, de l'équation (2), soient distinctes.

Nous avons

$$\Delta(\alpha) = 2BB'B'' - (A' - \alpha)B'^2 - (A'' - \alpha)B''^2,$$

ou en multipliant par $A' - \alpha$, quantité différente de zéro,

$$-(A' - \alpha)\Delta(\alpha) = (A' - \alpha)^2 B'^2 - 2(A' - \alpha)BB'B'' \\ + (A' - \alpha)(A'' - \alpha)B''^2$$

D'autre part, α étant une racine de l'équation (2), cette relation peut s'écrire

$$-(A' - \alpha)\Delta(\alpha) = (A' - \alpha)^2 B'^2 + 2(A' - \alpha)BB'B'' + B^2B''^2$$

ou,

$$-(A' - \alpha)\Delta(\alpha) = \left\{(A' - \alpha)B' - BB''\right\}^2.$$

La racine α étant inférieure à A', cette égalité prouve que $\Delta(\alpha)$ est négatif, ou nul. Un calcul semblable permet de véri-

fier que Δ (β) est positif, ou nul. Par conséquent, si les racines ne sont pas les nombres α et β eux-mêmes, à la suite :

$$-\infty, \quad \alpha, \quad \beta, \quad +\infty,$$

correspondent les signes :

$$+ \quad - \quad + \quad - .$$

La suite de Cauchy sépare donc les racines de l'équation en S. Nous ferons observer ici que la suite de Jacobi est préférable à celle de Cauchy pour les deux motifs suivants :

1° Dans la suite de Jacobi il y a deux intervalles bien limités ;

2° Les nombres de Jacobi sont toujours commensurables quand les coefficients de l'équation proposée sont eux-mêmes de cette nature.

SEIZIÈME LEÇON

APPLICATIONS DE L'ÉQUATION EN S. — PLANS PRINCIPAUX. — PLANS CYCLIQUES

196. Définitions. Lorsque, dans une quadrique Σ, un diamètre Δ est conjugué d'un plan P; si, en outre, Δ est perpendiculaire sur P, on dit que Δ est un **axe** et que P est un **plan principal** de Σ.

Les droites parallèles à Δ sont appelées **Cordes principales** de la quadrique. Nous allons montrer que la détermination de ces directions remarquables peut s'obtenir par la résolution de l'équation en **S**.

197. Détermination des directions principales. Soient λ, μ, ν, les cosinus directeurs d'une corde principale; le plan diamétral conjugué a pour équation

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

ou, en passant à la forme explicite et en ordonnant,

$$\text{(P)}\quad x(A\lambda + B''\mu + B'\nu) + y(B''\lambda + A'\mu + B\nu) + z(B'\lambda + B\mu + A''\nu) + C\lambda + C'\mu + C''\nu = 0.$$

Le plan P étant perpendiculaire sur la direction donnée, on a donc

$$(2)\quad \frac{A\lambda + B''\mu + B'\nu}{\lambda} = \frac{B''\lambda + A'\mu + B\nu}{\mu} = \frac{B'\lambda + B\mu + A''\nu}{\nu}.$$

Si l'on adjoint à ces deux équations, la relation :

$$(3) \quad \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,$$

on obtient un système permettant de déterminer les inconnues λ, μ, ν. Mais le nombre et la nature des solutions se reconnaissent plus nettement en prenant une inconnue auxiliaire $\mathfrak{s}$, représentant la valeur commune des rapports (2). On a ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} (A-\mathfrak{s})\lambda+B''\mu+B'\nu=0, \\ B''\lambda+(A'-\mathfrak{s})\mu+B\nu=0, \\ B'\lambda+B\mu+(A''-\mathfrak{s})\nu=0. \end{cases}$$

Ces équations sont linéaires et homogènes; d'ailleurs, elles doivent être vérifiées par des valeurs de λ, μ, ν qui ne sont pas toutes nulles; on a donc

$$(5) \quad \begin{vmatrix} A-\mathfrak{s} & B'' & B' \\ B'' & A'-\mathfrak{s} & B \\ B' & B & A''-\mathfrak{s} \end{vmatrix}=0.$$

Dans ce calcul, $\mathfrak{s}$ est une inconnue auxiliaire et il ne faut pas perdre de vue que les inconnues véritables, celles que l'on propose de déterminer, sont, en définitive, les nombres λ, μ, ν. De là, une discussion que nous allons développer.

198. Théorème. *Dans une quadrique il y a toujours trois directions principales.*

L'équation (5) qui détermine l'inconnue auxiliaire n'est autre chose que l'équation en $\mathfrak{s}$ dont l'étude nous a occupé dans la précédente leçon. Nous savons, entre autres choses, que ses racines sont toujours réelles; nous les désignerons par $\mathfrak{s}'$, $\mathfrak{s}''$ et $\mathfrak{s}'''$, et nous représenterons les cosinus des directions principales correspondantes, respectivement, par :

$$\lambda', \mu', \nu'; \quad \lambda'', \mu'', \nu''; \quad \lambda''', \mu''', \nu'''.$$

Les équations (4) donnent

$$\frac{\lambda'}{BB''-B'(A'-\mathfrak{s}')}=\frac{\mu'}{B'B''-B(A-\mathfrak{s}')}=\frac{\nu'}{(A-\mathfrak{s}')(A'-\mathfrak{s}')-B''^2},$$

et chacun de ces rapports a pour valeur

$$\mp \frac{1}{\sqrt{\{BB''-B'(A'-S')\}^2+\{B'B''-B(A'-S')\}^2+\{(A-S')(A'-S')-B''\}^2}}$$

les inconnues λ', μ', ν' se trouvent donc déterminées. Il est vrai qu'il y a ambiguïté, relativement au signe; mais les deux solutions donnant des valeurs égales et de signes contraires, les deux points directeurs ainsi obtenus sont situés sur une droite passant par l'origine; il n'y a donc qu'une droite principale correspondant à la racine simple S'.

L'équation en S ayant ses trois racines réelles, il y a trois droites principales correspondantes.

199. Cas des surfaces de révolution. Lorsque les trois racines de l'équation en S sont distinctes, nous venons de montrer qu'il y avait trois séries de cordes principales, mais il nous reste à examiner le cas particulier où cette équation a des racines multiples.

Supposons d'abord que nous ayons:

$$S' = S'', \quad \text{et} \quad S' \neq S''';$$

Nous allons montrer qu'il y a une infinité de cordes principales parallèles à un plan fixe; ce cas est celui des quadriques de révolution, qui ne sont pas des sphères. Nous distinguerons deux cas, suivant que le produit $B B' B''$ est nul, ou différent de zéro.

1° Soit $B B' B'' \neq 0$. En posant, comme nous l'avons déjà fait (§ 193),

$$\alpha = A - \frac{B'B''}{B}, \quad \alpha' = A' - \frac{BB''}{B'}, \quad \alpha'' = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

les équations (4) s'écrivent

$$\lambda \frac{S-\alpha}{B'B''} = \mu \frac{S-\alpha'}{B''B} = \nu \frac{S-\alpha''}{BB'} = \frac{\lambda}{B} + \frac{\mu}{B'} + \frac{\nu}{B''}.$$

Lorsque, dans le cas général ($BB'B'' \neq 0$), deux racines de l'équation en S sont égales, hypothèse que nous examinons, nous savons que (§ 193)

$$S' = S'' = \alpha = \alpha' = \alpha''.$$

Les équations précédentes se réduisent donc à celle-ci :

$$\frac{\lambda}{B} + \frac{\mu}{B'} + \frac{\nu}{B''} = 0,$$

et nous pouvons conclure de cette remarque, qu'à la racine double correspondent une infinité de directions principales, lesquelles sont parallèles au plan fixe qui est représenté par l'équation

$$\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''} = 0.$$

2° Supposons maintenant que l'on ait

$$BB'B'' = 0,$$

et que l'équation en S ait une racine double. Dans cette hypothèse, nous avons

$$B' = B'' = 0, \qquad (A - A')(A - A'') = B^2,$$

et,

$$S = A.$$

Les équations (4) donnent alors

$$(A' - A)\mu + B\nu = 0, \quad \text{et} \quad B\mu + (A'' - A)\nu = 0,$$

les directions principales sont donc, dans ce cas, parallèles au plan qui correspond à l'une ou l'autre des équations :

$$(A' - A)y + Bz = 0, \qquad \text{ou} \qquad By + (A'' - A)z = 0.$$

Le cas de la racine triple n'offre qu'un intérêt secondaire, la quadrique qui correspond à l'équation donnée étant une sphère. Nous ferons seulement remarquer que les équations (4) deviennent alors absolument indéterminées et qu'elles sont vérifiées quels que soient les nombres λ, μ, ν. La raison

géométrique de cette indétermination, signalée par l'analyse, ressort manifestement de ce fait que toutes les droites de l'espace sont, pour une sphère, des directions principales.

200. Étude du plan principal. A une racine simple S', de l'équation en S, correspond un plan principal dont l'équation est

$$\lambda' f'_x + \mu' f'_y + \nu' f'_z = 0,$$

ou, sous la forme explicite,

$$x(A\lambda' + B''\mu' + B'\nu') + y(B''\lambda' + A'\mu' + B\nu') + z(B'\lambda' + B\mu' + A''\nu') + C\lambda' + C'\mu' + C''\nu' = 0.$$

Nous avons, d'ailleurs,

$$\begin{aligned} A\lambda' + B''\mu' + B'\nu' &= S'\lambda', \\ B''\lambda' + A'\mu' + B\nu' &= S'\mu', \\ B'\lambda' + B\mu' + A''\nu' &= S'\nu'. \end{aligned}$$

D'après cela, l'équation du plan principal s'écrit :

$$(P') \quad S'(\lambda' x + \mu' y + \nu' z) + C\lambda' + C'\mu' + C''\nu' = 0.$$

On peut tirer de là plusieurs conséquences.

1° Cette relation prouve qu'*à une racine simple, et différente de zéro, de l'équation en S, correspond toujours un plan principal, situé à distance finie;* sa position est d'ailleurs bien déterminée. Cette remarque repose sur l'observation qu'à une racine simple de l'équation en S correspondent des valeurs bien déterminées pour les paramètres λ', μ', et ν', qui ne peuvent pas être nuls à la fois.

2° On voit aussi *qu'il y a toujours un plan principal à distance finie,* puisque les trois racines de l'équation en S ne peuvent pas être nulles, simultanément.

3° *Si S' est une racine double, et différente de zéro, de l'équation en S*; les paramètres λ', μ', ν', sont indéterminés et assujettis seulement à vérifier une relation linéaire et homogène. L'équation (P') peut donc s'écrire sous la forme

$$U\lambda' + V\mu' = 0.$$

On voit ainsi qu'elle représente un plan mobile passant constamment par la droite fixe qui correspond aux équations

$$U = 0, \quad V = 0.$$

4° *Si $\mathfrak{s}'$ est une racine triple* (racine nécessairement différente de zéro) les paramètres λ', μ', ν', vérifient seulement l'égalité

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1,$$

et l'on peut dire que *tous les plans de l'espace ont une direction principale relativement à la quadrique qui, dans cette hypothèse, représente une sphère* (§ 192).

5° *Si $\mathfrak{s}'$ est une racine simple, et égale à zéro* ; le plan principal correspondant est rejeté à l'infini, si l'on a

$$C\lambda' + C'\mu' + C''\nu' \gtrless 0\,;$$

au contraire, si

$$C\lambda' + C'\mu' + C''\nu' = 0,$$

le plan principal qui correspond à la racine nulle est indéterminé.

Dans le premier cas, on a (notation du § 128) $\Delta = 0$, et $\Delta' \gtrless 0$; par suite $H \gtrless 0$. La surface est un paraboloïde.

Dans la seconde hypothèse, on a $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$; et, par conséquent, $H = 0$. La surface considérée est alors un cylindre et l'indétermination du plan principal qui correspond à la racine nulle, s'explique en observant que tout plan perpendiculaire aux génératrices du cylindre peut être considéré comme un plan principal relativement aux cordes qui sont parallèles aux génératrices. Les deux autres plans principaux qui correspondent aux racines non nulles sont évidemment déterminées par l'axe du cylindre et par les axes de la section normale; la droite que nous appelons ici *axe du cylindre* étant celle qui est commune aux trois plans du centre.

6° Enfin *supposons que $\mathfrak{s}'$ soit une racine double, et nulle.* En coupant la surface par un plan P, perpendiculaire aux

génératrices du cylindre parabolique qui correspond à l'équation proposée, on obtient une parabole. Soit Δ l'axe de cette courbe ; le plan qui passe par Δ, perpendiculairement à P, est le plan principal qui correspond à la racine non nulle. Quant aux plans principaux qui correspondent à la racine nulle, ils sont indéterminés ; cette indétermination s'expliquant, d'ailleurs, par la raison déjà donnée tout à l'heure.

PLANS CYCLIQUES

201. Définition. On nomme *plan cyclique*, celui qui coupe une quadrique suivant un cercle. La détermination de ces plans est une conséquence immédiate de la connaissance des racines de l'équation en $\mathfrak{S}$; c'est ce que nous allons montrer maintenant.

202. Théorème. *Si $\mathfrak{S}'$ désigne une racine de l'équation en $\mathfrak{S}$, on a*

$$(1)\quad \varphi - \mathfrak{S}'(x^2+y^2+z^2) = \mathrm{UV};$$

et les équations

$$(2)\quad \mathrm{U} = \lambda, \quad \mathrm{V} = \mu,$$

représentent, quels que soient λ et μ, des plans cycliques.

En effet, nous avons

$$f = \varphi + \mathrm{P},$$

P désignant une forme linéaire des lettres x, y et z. Nous pouvons donc écrire

$$(3)\quad f = \mathfrak{S}'(x^2+y^2+z^2) + \mathrm{P} + \mathrm{UV}.$$

Cherchons les solutions communes aux équations

$$f = 0, \quad \text{et} \quad \mathrm{U} = \lambda.$$

L'identité (3) prouve que nous pouvons substituer, à ce système, le suivant :

$$\mathfrak{S}'(x^2+y^2+z^2)+P+\lambda V=0, \quad U=\lambda.$$

La première de ces équations représente une sphère, puisque P et V sont des formes linéaires; à l'autre, correspond un plan. Ainsi, tous les points communs à la quadrique donnée et au plan considéré, sont situés sur une circonférence.

Cette remarque s'applique aux plans qui correspondent à l'équation

$$V=\mu,$$

quel que soit μ.

203. Théorème. *A la racine moyenne $\mathfrak{S}''$, de l'équation en $\mathfrak{S}$, correspondent deux séries de plans cycliques réels.*

En effet si nous supposons que les racines de l'équation en $\mathfrak{S}$ soient inégales et que $\mathfrak{S}''$ désigne la racine moyenne, nous avons établi plus haut (§ 187) que cette racine donnait, pour la forme quadratique

$$\text{(A)} \quad \varphi-\mathfrak{S}''(x^2+y^2+z^2),$$

une décomposition en deux carrés affectés de signes contraires. Les facteurs que nous avons appelés U et V, au paragraphe précédent, sont donc réels.

Aux deux autres racines de l'équation en $\mathfrak{S}$ correspondent des décompositions en carrés affectés du même signe; les plans cycliques, donnés par l'identité (1), sont alors imaginaires.

Lorsque l'équation en $\mathfrak{S}$ a une racine double, à cette racine correspond pour la forme (A) un carré parfait; la quadrique est alors de révolution, et les deux séries de plans cycliques que nous venons de signaler ne forment plus qu'une seule et même série.

204. Théorème. *Lorsque deux cercles γ, γ', sont situés*

sur une quadrique Q *et dans des plans non parallèles* M *et* N, *ils appartiennent à une même sphère.* (Théorème de HACHETTE.)

Prenons pour axe OZ la droite Δ intersection des plans M et N et pour plan XOY un plan quelconque, mais perpendiculaire à Δ. Nous formons ainsi un système d'axes semi-rectangulaires et les cercles γ, γ', sont situés dans les plans ZOY, ZOX.

Cherchons l'équation générale des quadriques passant par les cercles γ, γ'.

En faisant $y = 0$, dans l'équation cherchée, on doit obtenir l'équation du cercle γ, et comme l'angle ZOX est droit, on voit que l'équation de la surface affecte la forme :

$$y(mx + ny + pz + B) + x^2 + z^2 + Ax + Cz + D = 0.$$

D'autre part, en faisant $x = 0$, on doit trouver l'équation du cercle γ' dans le système YOZ; il résulte de là que p est nul, et que n est égal à l'unité. L'équation cherchée est donc, finalement,

$$x^2 + y^2 + z^2 + mxy + Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ceci posé, si l'on considère l'équation particulière obtenue en faisant $m = 2 \cos \lambda$,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy \cos \lambda + Ax + By + Cz + D = 0,$$

Cette équation, dans laquelle λ désigne l'angle YOX, représente une sphère qui passe par les cercles γ et γ'. Ainsi, deux sections circulaires, non parallèles, d'une même quadrique, appartiennent à la même sphère.

205. Théorème. *Il n'existe pas sur une quadrique trois plans cycliques réels formant un véritable trièdre; exception faite du cas où cette quadrique est une sphère.*

Supposons, un instant, qu'il y ait trois plans cycliques réels formant un véritable trièdre et prenons ce trièdre pour consti-

tuer les axes de coordonnées. Si nous désignons par λ, μ, ν les angles formés par ces axes, nous devons trouver

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \nu + Ax + By + D,$$

en faisant $z = 0$, dans l'équation de la quadrique considérée. Cette équation peut donc s'écrire

$$z(\alpha x + \beta y + \gamma z + C) + x^2 + y^2 + 2xy \cos \nu + Ax + By + D = 0.$$

Cherchons maintenant la section par le plan ZOX ; l'équation de cette courbe est

$$z(\alpha x + \gamma z + C) + x^2 + Ax + D = 0,$$

et, puisque cette section est un cercle, on doit avoir

$$\alpha = 2 \cos \mu, \qquad \gamma = 1.$$

Enfin, en considérant la section par le plan ZOY, on voit aussi que

$$\beta = 2 \cos \lambda.$$

En résumé, l'équation de la quadrique est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2yz \cos \lambda + 2zx \cos \mu + 2xy \cos \nu + Ax + By + Cz + D = 0;$$

or, nous savons que la surface correspondante est une sphère.

206. Théorème. *Tous les plans cycliques situés sur une quadrique sont donnés par la méthode indiquée plus haut* (§ 203); *méthode qui repose sur la connaissance de la racine moyenne de l'équation en* **S**.

En effet, imaginons un cercle Γ situé sur une quadrique Q; considérons en même temps deux cercles γ, γ', obtenus par la méthode citée et appartenant à deux systèmes différents. Si Γ n'était pas situé dans un plan parallèle à celui de γ, ou à celui de γ' ; si, en d'autres termes, Γ n'appartenait pas à l'un ou à l'autre des systèmes que nous avons trouvés plus haut, il y aurait sur Q trois cercles réels appartenant à des

plans formant un véritable trièdre, et nous venons de reconnaître que cette hypothèse n'était pas admissible, si Q ne représentait pas une sphère.

207. Théorème. *Dans les quadriques de révolution. il n'y a qu'un système de plans cycliques ; ce système étant constitué par des plans perpendiculaires à l'axe de la surface.*

Il y a sur cette quadrique des sections circulaires, à savoir celles que l'on obtient en coupant la surface par des plans perpendiculaires à son axe ; nous voulons montrer qu'il n'y en a pas d'autres.

Imaginons en effet une section circulaire quelconque et prenons son plan, pour plan XOY. La quadrique étant de révolution son équation peut se mettre sous la forme

$$(Q) \qquad \Sigma + (ax + by + cz)^2 = 0,$$

Σ représentant le premier membre de l'équation d'une sphère. En faisant $z = 0$, on doit trouver l'équation d'un cercle ; les axes étant rectangulaires, on voit alors que le produit ab est nul ; soit $a = 0$. L'équation (Q) devient :

$$\Sigma + (by + cz)^2 = 0.$$

Faisons de nouveau $z = 0$; les coefficients de x^2 et de y^2 devant être égaux, on voit encore que b est nul et l'équation de (Q) s'écrit enfin

$$\Sigma + c^2z^2 = 0.$$

Le plan cyclique imaginé a donc pour équation $z = 0$, il est perpendiculaire à l'axe de la quadrique ; il n'y a donc qu'une série de plans cycliques, plans perpendiculaires à l'axe de la surface.

208. Réciproquement. *S'il n'existe dans une quadrique donnée qu'une seule direction de plans cycliques, la surface considérée est de révolution.*

En effet, soit S'' la racine moyenne de l'équation en S qui correspond à l'équation de la quadrique proposée.

Dans l'hypothèse que nous avons faite, la forme quadratique

$$\varphi - S'' (x^2 + y^2 + z^2),$$

est un carré parfait et l'on peut poser

$$\varphi - S'' (x^2 + y^2 + z^2) = (mx + ny + pz)^2.$$

On a donc

$$f = \varphi + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D,$$

ou,

$$f = S'' (x^2 + y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D + (mx + ny + pz)^2$$

Cette équation prouve que $f = 0$, représente une surface de révolution.

209. Théorème. *Les plans cycliques qui correspondent à la racine moyenne S'' sont parallèles aux cordes principales qui correspondent à cette même racine.*

Posons

$$\varphi - S'' (x^2 + y^2 + z^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z);$$

nous avons alors

$$(1) \quad \begin{cases} A - S'' = \alpha\alpha', & A' - S'' = \beta\beta', & A'' - S'' = \gamma\gamma', \\ 2B = \beta\gamma' + \gamma\beta', & 2B' = \gamma\alpha' + \alpha\gamma', & 2B'' = \alpha\beta' + \beta\alpha'. \end{cases}$$

D'autre part, les cosinus (λ, μ, ν), de la direction principale qui correspond à S'', sont donnés par les égalités.

$$\begin{aligned} (A - S'')\lambda + B''\mu + B'\nu &= 0, \\ B''\lambda + (A' - S'')\mu + B\nu &= 0, \\ B'\nu + B\mu + (A'' - S'')\nu &= 0. \end{aligned}$$

La première de ces relations, en tenant compte des égalités (1), peut s'écrire

$$2\alpha\alpha'\lambda + (\alpha\beta' + \beta\alpha')\mu + (\gamma\alpha' + \alpha\gamma')\nu = 0,$$

ou

$$\alpha(\alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu) + \alpha'(\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) = 0.$$

On voit ainsi qu'en posant

$$\rho = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu, \quad \text{et} \quad \sigma = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu$$

on a

$$(2) \quad \alpha\rho + \alpha'\sigma = 0, \quad \beta\rho + \beta'\sigma = 0, \quad \gamma\rho + \gamma'\sigma = 0.$$

Si l'on suppose $\sigma = 0$, ces relations donnent :

$$\alpha\rho = 0, \quad \beta\rho = 0, \quad \gamma\rho = 0,$$

et, par suite, $\rho = 0$; les paramètres α, β, γ ne pouvant pas être nuls à la fois. Les plans cycliques sont donc l'un et l'autre parallèles à la droite représentée par les équations

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

droite qui est une corde principale correspondant à la racine S''.

Enfin, si l'on admettait que ρ et σ fussent différents de zéro, les relations (2) donneraient

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

la forme $\varphi - S''(x^2 + y^2 + z^2)$ serait un carré parfait. Dans ce cas, la surface serait de révolution ; il n'y a plus alors qu'une série de plans cycliques réels qui correspondent à la racine double. On sait qu'à cette racine correspondent une infinité de directions principales qui sont toutes parallèles à un plan fixe, perpendiculaire à l'axe; elles sont donc aussi parallèles aux plans cycliques de la surface.

210. Ombilics. Les points communs à une quadrique et aux diamètres conjugués des plans cycliques réels s'appellent les *ombilics*.

Il y a, en général, quatre ombilics : réels, imaginaires, ou rejetés à l'infini. Nous reviendrons plus tard sur la détermination de ces points remarquables.

EXERCICES

1. *On considère les deux droites Δ, Δ' qui correspondent aux équations*

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'};$$

par l'origine, on mène une droite mobile Δ'', faisant avec Δ, un angle V; avec Δ', un angle V'; ces angles V, V', ayant des cosinus dont le produit est constant.

Démontrer que le lieu décrit par Δ'' est un cône du second ordre et que les plans cycliques de cette surface sont perpendiculaires : les uns sur Δ, les autres sur Δ'.

Reconnaître géométriquement cette propriété.

En posant

$$\cos V \cos V' = K,$$

on trouve, pour l'équation du lieu décrit par Δ'',

$$K(x^2+y^2+z^2)=(\alpha x+\beta y+\gamma z)(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z).$$

Cette équation met en évidence la propriété énoncée.

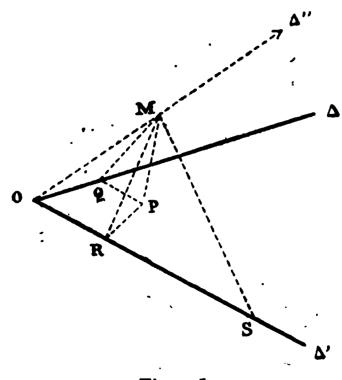


Fig. 25.

La démonstration géométrique est aussi très simple. Prenons sur Δ'' un point M et projetons ce point en P sur le plan Δ o Δ'; de P abaissons sur Δ et sur Δ' des perpendiculaires PQ, PR et joignons enfin MQ et MR.

Nous avons

$$OQ = OM \cos V, \quad OR = OM \cos V',$$

et, par suite,

$$(1) \quad OQ \,.\, OR = K \,.\, \overline{OM}^2.$$

Dans le plan $\Delta' o \Delta''$ élevons une perpendiculaire à Δ'', au point M, et soit S le point où elle rencontre Δ'; le triangle rectangle OMS nous donne

$$(2) \quad \overline{OM}^2 = OR \,.\, OS.$$

Des égalités (1) et (2) nous déduisons

$$OQ = K \,.\, OS.$$

Si nous supposons que le point Q soit fixe, alors S est aussi un point fixe ; le point M qui est mobile avec Δ'', appartient : 1° à la sphère décrite sur OS comme diamètre; 2° à un plan fixe perpendiculaire à Δ, au point Q. Le lieu décrit par la droite Δ'' est donc un cône, ayant pour sommet le point O, et, pour directrice, un cercle situé dans un plan perpendiculaire à Δ.

2. *Exprimer que l'origine est un ombilic.*

En prenant le plan tangent à l'ombilic pour plan XOY, l'équation de la surface est

$$x^2 + y^2 = z(mx + ny + pz + q).$$

Si les axes de coordonnées sont quelconques on exprime que la section faite dans la surface par le plan qui a pour équation

$$Cx + C'y + C''z = 0,$$

est du genre cercle.

3. *Déterminer les plans cycliques de la surface qui correspond à l'équation*

$$x^2 + 2\alpha yz = 1.$$

Les racines de l'équation en S sont $-\alpha$, $+\alpha$, et $+1$. Trois cas doivent être distingués suivant que α est supérieur, égal, ou inférieur à l'unité. On voit, en particulier, que si $\alpha = 1$; la surface proposée, qui est un hyperboloïde à une nappe, est de révolution.

DIX-SEPTIÈME LEÇON

INVARIANTS. — RÉDUCTION (Axes rectangulaires).

211. Nous allons maintenant appliquer la connaissance des directions principales dans les quadriques, connaissance qui, comme nous l'avons montré, dépend de la résolution de l'équation en S, à la réduction de l'équation générale du second degré à des formes simples; cette réduction étant, cette fois, effectuée *avec des axes rectangulaires*. Nous établirons d'abord les invariants qui nous serviront dans le calcul que nous entreprenons.

Les notations que nous adoptons sont les suivantes. La quadrique Q a pour équation, dans l'ancien système,

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

$$f \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D;$$

et, dans le nouveau système

$$F(X, Y, Z, T) = 0,$$

$$F \equiv aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 + 2bYZ + 2b'ZX + 2b''XY + 2cX + 2c'Y + 2c''Z + d.$$

Les angles des axes, dans ces deux systèmes, sont respectivement λ, μ, ν; λ', μ', ν'. Enfin, les coefficients de l'équation en S sont :

$$\Delta_0, \quad I, \quad J, \quad \Delta,$$

pour f; et

$$\Delta_0, \quad i, \quad j, \quad \Delta,$$

pour F. Enfin, les hessiens des formes f et F sont représentés par les lettres H et h.

212. Théorème. *Quand on passe d'un système* (λ, μ, ν), *au système* (λ', μ', ν'), *les fonctions :*

$$\frac{I}{\Delta_0}, \quad \frac{J}{\Delta_0}, \quad \frac{\Delta}{\Delta_0},$$

sont des invariants.

En effet, dans ce passage,

$$\varphi \textit{ devient } \Phi$$

et v,

$$v = x^2 + y^2 + z^2 + 2zy\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu,$$
$$\textit{devient } U,$$
$$U = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2ZY\cos\lambda' + 2ZX\cos\mu' + 2XY\cos\nu'.$$

Par conséquent,

$$\varphi - S.v \textit{ devient } \Phi - S.U,$$

quelle que soit la constante S.

Si l'on choisit cette constante de façon que le discriminant de $\varphi - S.v$ soit nul, cette forme quadratique devient *une somme de deux carrés* et en effectuant une transformation linéaire on conservera cette forme algébrique. Ainsi $\Phi - S.U$ est une somme de deux carrés ; les équations en S, qui correspondent aux deux formes φ et Φ, ont donc les mêmes racines.

L'équation en S étant, comme nous l'avons vu (§ 184),

$$\delta(S) = \begin{vmatrix} A - S & B'' - S\cos\nu & B' - S\cos\mu \\ B'' - S\cos\nu & A' - S & B - S\cos\lambda \\ B' - S\cos\mu & B - S\cos\lambda & A'' - S \end{vmatrix} = 0,$$

on remarquera que le coefficient de S^3 est le discriminant Δ_0 de la forme v, et que le terme tout connu est égal à Δ, discriminant de la forme φ ; si l'on désigne, comme nous

l'avons déjà fait, par I et J les deux autres coefficients, on voit que les deux équations :

$$\Delta_0 S^3 + I S^2 + J S + \Delta = 0,$$
$$\Delta_0 S^3 + i S^2 + j S + \Delta = 0,$$

ayant les mêmes racines, on doit avoir

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_0} = \frac{I}{i} = \frac{J}{j} = \frac{\Delta}{\Delta}.$$

Ainsi, les fonctions suivantes :

$$\frac{\Delta}{\Delta_0}, \quad \frac{J}{\Delta_0}, \quad \frac{I}{\Delta_0},$$

conservent la même valeur, quand on passe d'un système d'axes à un autre système; la transformation en question étant effectuée sur la forme φ, au moyen des formules connues (§ 19).

212. Théorème. *Dans la transformation générale des coordonnées, la fonction*

$$\frac{H}{\Delta_0},$$

est un invariant.

Considérons la forme quadratique $r(x, y, z, t)$,

$$r = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu + 2\gamma xt + 2\gamma' yt + 2\gamma'' zt + gt^2.$$

Après la transformation, r devient une forme quadratique R des lettres X, Y, Z, T, et l'on a :

$$\begin{aligned} R = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2YZ\cos\lambda' + 2ZX\cos\mu' + 2XY\cos\nu' \\ + 2\Gamma XT + 2\Gamma' YT + 2\Gamma'' ZT + GT^2. \end{aligned}$$

Ainsi, après la transformation,

f *devient* F,
r » R;

par conséquent, quel que soit K,

$$f - Kr \quad \textit{devient} \quad F - KR.$$

Disposons de K de façon que la forme quadratique $f - kr$ soit une somme de trois carrés et, à cet effet, égalons son discriminant à zéro. L'inconnue K est donnée par l'équation

$$\Delta(K) = \begin{vmatrix} A - K & B'' - K\cos\nu & B' - K\cos\mu & C - K\gamma \\ B'' - K\cos\nu & A' - K & B - K\cos\lambda & C' - K\gamma' \\ B' - K\cos\mu & B - K\cos\lambda & A'' - K & C'' - K\gamma'' \\ C - K\gamma & C' - K\gamma' & C'' - K\gamma'' & D - Kg \end{vmatrix} = 0$$

Cette équation en K est du quatrième degré; le terme tout connu est le hessien H, et le coefficient de K^4 est le hessien H_0 de la forme r.

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$(1) \quad H_0 K^4 - \ldots . + H = 0.$$

Considérons maintenant l'équation

$$r = 0,$$

et désignons par ρ le rayon de la sphère qui lui correspond.

Nous avons démontré précédemment (§ 76) la relation

$$\Delta_0 \rho^2 + H_0 = 0.$$

D'après cela, l'équation (1) devient

$$\Delta_0 \rho^2 K^4 + \ldots . - H = 0.$$

Si nous cherchons, de même, l'équation en K qui correspond à la forme $F - KR$, nous aurons, ρ ayant la même valeur,

$$\Delta_0 \rho^2 K^4 + \ldots . - h = 0.$$

Ces deux équations en K ayant les mêmes racines, nous concluons enfin que

$$\frac{H}{\Delta_0} = \frac{h}{\Delta_0}.$$

La fonction $\frac{H}{\Delta_0}$ jouit donc de la propriété de l'invariance.

214. Remarque. Les démonstrations précédentes sont soumises à l'objection ordinaire que nous avons déjà signalée dans la géométrie plane (§ 208). La conclusion à laquelle aboutissent toutes ces démonstrations est rigoureuse, si l'on suppose que les deux équations considérées (ou seulement l'une d'entre elles) n'ont pas de racines multiples; elle n'a plus la même certitude, dans l'hypothèse contraire.

Pour l'équation δ (S) $=$ o, il a été répondu déjà à l'objection en question (*G. pl.*, loc. cit.)

Quant à l'équation Δ (K) $=$ o, nous verrons un peu plus loin qu'elle ne peut avoir de racines égales que si la sphère considérée est tangente à la quadrique donnée. Cette circonstance particulière ne sera pas réalisée, si, comme nous le supposons, $r = 0$ représente une sphère quelconque dans l'espace.

215. Invariant particulier au cylindre. Théorème. *Si l'on considère le hessien* H *correspondant à une forme qui, égalée à zéro, représente un cylindre, la somme des trois mineurs, somme qu'on peut représenter par* $H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}$, *est un invariant, quand on passe d'un système rectangulaire à un système de même espèce.*

En prenant l'axe du cylindre pour axe *oz*, et les deux axes d'une section normale quelconque pour axes *ox* et *oy*; l'équation du cylindre, dans le nouveau système, est

$$aX^2 + a'Y^2 + a''T^2 = 0.$$

On a donc

$$f(x,y,z,t) = aX^2 + a'Y^2 + a''T^2$$

x, y, z, t désignant, dans cette identité, des formes linéaires des lettres X, Y, Z, T. Si l'on observe que $t = T = 1$, on voit que la forme quadratique

$$(1) \quad f(x,y,z,t) - a''t^2,$$

est une somme de deux carrés; et comme son discriminant est

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D - a'' \end{vmatrix},$$

tous les mineurs de première classe de ce déterminant sont nuls.

En particulier, on a

$$\begin{vmatrix} A' & B & C' \\ B & A'' & C'' \\ C' & C'' & D - a'' \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$H'_A - a''(A'A'' - B^2) = 0.$$

On trouve, de même,

$$H'_{A'} - a''(A''A - B'^2) = 0,$$
$$H'_{A''} - a''(AA' - B''^2) = 0.$$

Ces trois dernières egalités donnent, par combinaison,

$$(2) \quad H'_A + H'_{A'} + H'_{A''} = a''(AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)$$

On a d'ailleurs, par application des invariants,

$$a + a' = A + A' + A''$$
$$aa' = AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2.$$

D'autre part, les nombres m, et n,

$$m = -\frac{a''}{a}, \quad n = -\frac{a''}{a'}$$

sont des invariants absolus parce qu'ils représentent les carrés des axes de la section normale. Ces deux formules conduisent à la suivante :

$$(3) \quad -(m + n) = a''\frac{a + a'}{aa'} = a''\frac{A + A' + A''}{AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2}.$$

Les fonctions :

$$A + A' + A'', \quad AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2,$$

jouissant de la propriété de l'invariance, m et n étant des invariants absolus, les égalités (2) et (3) prouvent l'exactitude du théorème énoncé.

La démonstration précédente est en défaut dans le cas du cylindre parabolique, mais en considérant cette surface comme la limite d'un cylindre elliptique ou hyperbolique dont la section droite se déforme, et tend vers une parabole, on peut admettre que l'invariant

$$H'_A + H'_{A'} + H'_{A''},$$

est applicable aux cylindres paraboliques.

RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE

(*Axes rectangulaires.*)

216. Théorème. *A deux racines distinctes de l'équation en* S *correspondent deux directions rectangulaires.*

Les notations adoptées plus haut (§ 200) étant prises de nouveau, on a

$$\begin{aligned} A\lambda' + B''\mu' + B'\nu' &= S'\lambda', & A\lambda'' + B''\mu'' + B'\nu'' &= S''\lambda'', \\ B''\lambda' + A'\mu' + B\nu' &= S'\mu', & B''\lambda'' + A'\mu'' + B\nu'' &= S''\mu'', \\ B'\lambda' + B\mu' + A''\nu' &= S'\nu', & B'\lambda'' + B\mu'' + A''\nu'' &= S''\nu''. \end{aligned}$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par

$$\lambda'', \mu'', \nu''; \quad \text{et} \quad \lambda', \mu', \nu';$$

nous avons, par comparaison,

$$(S' - S'')(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'') = 0.$$

Comme $\mathfrak{S}'$ n'est pas égale à $\mathfrak{S}''$, nous concluons, de cette égalité, la suivante :

$$\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' = 0,$$

et celle-ci prouve le théorème énoncé.

217. Théorème. *Lorsqu'on prend pour axes de coordonnées* O'X, O'Y, O'Z *trois directions principales.*

1° *Les termes en* XY, XZ, *et* YZ *disparaissent.*

2° *Les coefficients des termes en* X^2, Y^2, *et* Z^2 *sont égaux aux racines de l'équation en* $\mathfrak{S}$.

Les formules de transformation étant

$$x = \lambda'X + \lambda''Y + \lambda'''Z,$$
$$y = \mu'X + \mu''Y + \mu'''Z,$$
$$z = \nu'X + \nu''Y + \nu'''Z;$$

la forme $f(x, y, z, t)$ devient F (X, Y, Z, T) et les nouveaux coefficients se calculent par les formules :

$$a = A\lambda'^2 + A'\mu'^2 + A''\nu'^2 + 2B\mu'\nu' + 2B'\nu'\lambda' + 2B''\mu'\lambda'$$
$$a' = A\lambda''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2B''\mu''\lambda''$$
$$a'' = A\lambda'''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2B''\mu'''\lambda'''$$
$$b = A\lambda''\lambda''' + A'\mu''\mu''' + A''\nu''\nu''' + B(\mu''\nu''' + \nu''\mu''') + B'(\lambda''\nu''' + \nu''\lambda''') + B''(\lambda''\mu''' + \mu''\lambda''')$$
$$b' = A\lambda'\lambda''' + \ldots\ldots\ldots\ldots + B''(\lambda'\mu''' + \mu'\lambda''')$$
$$b'' = A\lambda'\lambda'' + \ldots\ldots\ldots\ldots + B''(\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'').$$

D'autre part, les relations :

$$(H)\begin{cases} A\lambda' + B''\mu' + B'\nu' = \mathfrak{S}'\lambda', \\ B''\lambda' + A'\mu' + B\nu' = \mathfrak{S}'\mu', \\ B'\lambda' + B\mu' + A''\nu' = \mathfrak{S}'\nu', \end{cases}$$

multipliées respectivement par λ'' μ'' ν'', donnent

$$b'' = \mathfrak{S}'(\lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'')$$

et, par conséquent,

$$b'' = 0,$$

puisque les directions principales sont, deux à deux, rectangulaires.

On voit de même que b et b' sont nuls.

Enfin, si l'on multiplie les égalités (H) par λ', μ', ν', et si l'on ajoute ces résultats, on a

$$a = S'(\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2),$$

ou

$$a = S'.$$

On trouve aussi

$$a' = S'', \quad \text{et} \quad a'' = S'''.$$

218. Réduction des surfaces de la première classe. ($\Delta \neq 0$). Faisons d'abord tourner les axes (supposés rectangulaires) autour de l'origine et prenons pour axes nouveaux le trièdre que nous avons appelé *trièdre principal.* Si les racines de l'équation en S sont distinctes, ce trièdre est bien déterminé; si non, nous avons vu qu'il y avait une infinité de trièdres principaux et, dans ce cas, nous prendrons l'un d'entre eux, arbitrairement.

L'équation de la quadrique prend la forme

$$S'X^2 + S''Y^2 + S'''Z^2 - 2\gamma X - 2\gamma' Y - 2\gamma'' Z + D = 0.$$

En transportant les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point dont les coordonnées sont :

$$\frac{\gamma}{S'}, \quad \frac{\gamma'}{S''}, \quad \frac{\gamma''}{S'''},$$

l'équation comporte une nouvelle simplification et devient :

$$S'\xi^2 + S''\eta^2 + S'''\zeta^2 + D_1 = 0.$$

Calculons maintenant la nouvelle constante D_1. A cet effet,

remarquons que le hessien de cette équation se réduit à $S'S''S'''D_1$; nous avons donc, les axes étant rectangulaires, $(\Delta_0 = 1)$ (§ 213)

$$H = S'S''S'''D_1;$$

et comme

$$S'S''S''' = \Delta,$$

nous obtenons, enfin,

$$D_1 = \frac{H}{\Delta}.$$

Concluons donc : *Il existe, pour les surfaces de la première classe, un trièdre trirectangle qui, étant pris pour constituer les axes de coordonnées, donne l'équation de la surface sous la forme :*

$$\text{(I)} \quad S'\xi^2 + S''\eta^2 + S'''\zeta^2 + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

Dans cette équation, H *est le discriminant de la forme f,* Δ *celui de* φ*; enfin* S', S'', S'''*, désignent les trois racines de l'équation en* S.

219. Réduction des surfaces de la seconde classe $(\Delta = 0, H \gtrless 0)$. Dans le cas où l'équation donnée représente l'un des deux paraboloïdes, nous savons que l'équation en S admet une seule racine nulle S'. La quadrique, rapportée au trièdre principal, a pour équation

$$S''Y^2 + S'''Z^2 - 2\gamma X - 2\gamma' Y - 2\gamma'' Z + D = 0.$$

Transportons maintenant les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point qui a pour coordonnées :

$$\alpha, \frac{\gamma'}{S''}, \frac{\gamma''}{S'''};$$

l'équation devient

$$S''\eta^2 + S'''\zeta^2 - 2\gamma\xi - 2\gamma\alpha - \frac{\gamma'^2}{S''} - \frac{\gamma''^2}{S'''} = 0.$$

Disposons alors de l'indéterminée α de façon que nous ayons

$$2\gamma\alpha + \frac{\gamma'^2}{\mathbf{S}''} + \frac{\gamma''^2}{\mathbf{S}'''} = 0,$$

chose possible, car γ n'est pas nul [1]; nous obtenons l'équation réduite

$$\text{(II)} \quad \mathbf{S}''\eta^2 + \mathbf{S}'''\zeta^2 - 2\gamma\xi = 0.$$

Pour calculer γ, observons que le hessien de cette équation est

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \mathbf{S}'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}''' & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\gamma^2 \mathbf{S}''\mathbf{S}'''.$$

Nous avons donc (§ 213)

$$H = -\gamma^2\mathbf{S}''\mathbf{S}'''$$

Cette relation fait connaître pour γ deux valeurs égales, et de signes contraires. Il ne paraît pas aisé de vérifier que ces valeurs sont réelles, mais on peut expliquer, *à priori*, pourquoi elles le sont nécessairement. En effet on peut supposer que l'on ait effectué directement sur l'équation donnée, et sans avoir recours à la connaissance des invariants, la transformation nécessaire pour aboutir à l'équation (II). Nous savons, d'ailleurs, que cette transformation est possible et qu'elle ne peut introduire dans le calcul que des éléments réels; ainsi γ est une quantité réelle.

Quant au double signe qui affecte la valeur de γ, il n'apporte avec lui aucune ambiguïté; puisque, en changeant, à volonté, la direction de l'axe $o\xi$, on peut disposer du signe de γ.

1. Si γ était nul, la quadrique proposée serait un cylindre et non, comme nous le supposons, une paraboloïde.

En résumé : *les surfaces de la seconde classe rapportées à un certain trièdre trirectangle ont une équation de la forme*

$$\text{(II)} \quad \mathfrak{S}''\eta^2 + \mathfrak{S}'''\zeta^2 = 2\gamma\xi,$$

$\mathfrak{S}''$ *et* $\mathfrak{S}'''$ *étant les deux racines non nulles de l'équation en* $\mathfrak{S}$, *et le coefficient* γ *ayant pour valeur absolue :*

$$\pm\sqrt{\frac{-H}{\mathfrak{S}''\mathfrak{S}'''}}$$

220. Réduction des surfaces de la troisième classe. On trouve, d'abord, par la considération du trièdre principal,

$$\mathfrak{S}'X^2 + \mathfrak{S}''Y^2 - 2\gamma X - 2\gamma' Y + D = 0;$$

puis, par un transport convenable des axes, parallèlement à eux-mêmes,

$$\text{(III)} \quad \mathfrak{S}'X^2 + \mathfrak{S}''Y^2 = D_1.$$

Pour calculer D_1 on peut utiliser l'invariant particulier au cylindre $H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}$; mais, dans la pratique, il paraît aussi simple d'effectuer la réduction directement, et comme nous allons l'indiquer.

On sait que toutes les sections planes faites dans la surface qui nous occupe ont leurs centres placés sur une droite fixe, que nous appellerons *l'axe du cylindre*. En particulier, on pourra considérer la section faite par l'un des plans de coordonnées et transporter les axes, parallèlement à eux-mêmes, au centre de cette section.

Les équations de l'axe sont alors

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

et si l'on coupe le cylindre par un plan perpendiculaire à cette droite, ce plan a pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$$

En cherchant ensuite l'équation de la section dans ce plan,

problème que l'on résout par des formules connues (§ 25), on aura l'équation de la section droite et, par la transformation ordinaire, l'équation réduite de cette section.

Cette méthode, légèrement modifiée, s'applique au cylindre parabolique. On met en évidence une génératrice de cette surface, puis l'on transporte les axes, parallèlement à eux-mêmes, au point où cette droite rencontre l'un des plans de coordonnées ; ou en un point quelconque de cette droite, si l'on y trouve quelque avantage. En cherchant alors la section droite on obtient l'équation d'une parabole, et on sait comment on trouve l'équation réduite de cette courbe, en axes rectangulaires.

221. Réduction des surfaces de la quatrième et de la cinquième classe. Lorsque la surface proposée représente un cylindre parabolique, la considération d'un trièdre principal conduit d'abord à l'équation

$$\alpha Z^2 - 2mX - 2nY - 2pZ + q = 0.$$

En posant :

$$m = t\cos\varphi, \qquad n = t\sin\varphi.$$

l'égalité précédente peut s'écrire

$$\alpha Z^2 - 2t(X\cos\varphi + Y\sin\varphi) - 2pZ + q = 0.$$

Effectuons maintenant une rotation d'amplitude, φ, autour de OZ ; les formules de transformation sont :

$$\begin{aligned} X &= X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi, \\ Y &= X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi, \\ Z &= Z', \end{aligned}$$

et nous obtenons l'équation nouvelle

$$\alpha Z'^2 - 2tX' - 2pZ' + q = 0.$$

En transportant les axes, parallèlement à eux-mêmes, au

sommet de la parabole qui correspond à cette équation, nous avons, finalement,

$$\text{(IV)} \quad \alpha\zeta^2 = h\xi.$$

Quant au paramètre $\frac{h}{\alpha}$ qui représente la dimension du cylindre proposé, on peut le calculer : soit par l'application de l'invariant $H'_A + H'_{A'} + H'_{A''}$, soit par la méthode directe que nous avons indiquée tout à l'heure.

Le cas des surfaces de la cinquième classe n'offre aucun intérêt; ce qu'on peut appeler ici la dimension de la surface c'est la distance des deux plans parallèles, et cette longueur se détermine immédiatement, quand on a mis, par un calcul évident, l'équation proposée sous la forme :

$$(Ax + B''y + B'z)^2 = h.$$

EXERCICES

1. *Rapporter à son centre et à ses axes, la quadrique qui a pour équation*

$$14x^2 + 14y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz + 18x - 18y + 5 = 0.$$

L'équation en S est, dans cet exemple,

$$S^3 - 36S^2 + 396S - 1296 = 0;$$

Ses trois racines sont 6, 12, et 18; et le résultat final est donné par l'égalité

$$6X^2 + 9Y^2 + 3Z^2 = 2.$$

2. *Réduire, en axes rectangulaires, le paraboloïde elliptique qui correspond à l'équation,*

$$32x^2 + 18y^2 + 50z^2 + 48xy - 3x + 4y = 0.$$

L'équation en $\mathbf{S}$ est

$$\mathbf{S}^2 - 100\mathbf{S} + 2500 = 0 ;$$

et, l'on trouve, pour l'équation réduite

$$10X^2 + 10Y^2 = 1 ,$$

3. *Trouver les dimensions de la surface qui qui est représentée par l'équation*

$$x^2(2\alpha^2 + \beta^2) + y^2(2\beta^2 + \alpha^2) + z^2(\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta xy = \alpha^2 + 6^2.$$

L'équation en $\mathbf{S}$ est

$$\mathbf{S}^3 - 4(\alpha^2 + \beta^2)\mathbf{S}^2 + 5(\alpha^2 + \beta^2)^2\mathbf{S} - 2(\alpha^2 + \beta^2)^3 = 0 ;$$

elle a deux racines égales à $\alpha^2 + \beta^2$ et la troisième égale à $2(\alpha^2 + \beta^2)$.
L'équation réduite est

$$X^2 + Y^2 - 2Z^2 = 1 .$$

4. *Trouver les plans principaux et les dimensions de l'ellipsoïde qui a pour équation*

$$x^2(2\alpha^2 + \beta^2) + y^2(2\beta^2 + \alpha^2) + 2(\alpha^2 + \beta^2)z^2 + 2\alpha\beta xy = \alpha^2 + \beta^2.$$

Les plans principaux correspondent aux équations :

$$\beta x - \alpha y = 0, \qquad \alpha x + \beta y - \sqrt{\alpha^2 + 6^2}\, z = 0,$$
$$\alpha x + \beta y + \sqrt{\alpha^2 + 6^2}\, z = 0,$$

et l'équation réduite est, finalement,

$$2X^2 + 2Y^2 - Z^2 = 1 .$$

DIX-HUITIÈME ET DIX-NEUVIÈME LEÇONS

INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES. — HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

222. Deux quadriques correspondant aux équations :

$$(1) \quad Q=0, \qquad q=0;$$

$$Q \equiv Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cxt+2C'yt+2C''zt+Dt^2,$$

$$q \equiv ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy+2cxt+2c'yt+2c''zt+dt^2;$$

admettent une infinité de points communs. L'ensemble de ces points forme une courbe γ qui, généralement, est une courbe gauche du quatrième ordre. Dans certains cas particuliers, elle se décompose en deux coniques; et, dans une hypothèse, plus particulière encore, que nous signalerons plus loin quand nous nous occuperons des quadriques homothétiques, l'une de ces coniques peut être rejetée à l'infini. En un mot, c'est la situation relative de deux quadriques, données par leurs équations, qui fait l'objet des développements exposés dans cette leçon.

223. Théorème. *Il existe, en général, quatre cônes passant par la courbe γ, intersection de deux quadriques.* (Théorème de Poncelet.)

Démontrons d'abord que l'équation

$$(Q') \quad \lambda Q+\mu q=0,$$

représente l'équation générale des quadriques Q, passant par les points communs aux quadriques Q et q.

1° La quadrique (Q') passe par tous les points communs à Q et à q, car toute solution des équations (1) est, visiblement, une solution de (Q').

2° Montrons maintenant que (Q') représente l'équation de toutes les quadriques passant par la courbe γ, définie comme nous venons de le dire.

En effet, soit M_0 un point, non situé sur γ, et appartenant à une quadrique Σ passant par γ; l'équation

$$Qq_0 - qQ_0 = 0,$$

représente une quadrique Σ passant par γ et par M_0; je dis que Σ' se confond avec Σ.

En effet, un plan P passant par M_0 coupe Σ suivant une conique σ, et Σ' suivant une conique σ'; ces deux courbes ont cinq points communs, savoir : 1° les quatre points communs à γ et à P, 2° le point M_0. Ainsi, σ, et σ' se confondent; et ceci ayant lieu pour une infinité de plans tels que P, les deux quadriques Σ et Σ' sont elles-mêmes confondues.

Ceci posé, revenant au problème qui nous occupe, nous observerons que l'équation (Q') représentera un cône, si elle est une fonction homogène, et du second degré, de trois formes linéaires telles que

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t.$$

Ainsi, le discriminant de $\lambda Q + \mu q$ est nul, cette forme devant être décomposable en trois carrés, tout au plus. Écrivons donc

$$\rho = \begin{vmatrix} \lambda A + \mu a & \lambda B'' + \mu b'' & \lambda B' + \mu b' & \lambda C + \mu c \\ \lambda B'' + \mu b'' & \lambda A' + \mu a' & \lambda B + \mu b & \lambda C' + \mu c' \\ \lambda B' + \mu b' & \lambda B + \mu b & \lambda A'' + \mu a'' & \lambda C'' + \mu c'' \\ \lambda C + \mu c & \lambda C' + \mu c' & \lambda C'' + \mu c'' & \lambda D + \mu d \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée peut s'écrire

$$(1) \quad H\lambda^4 + \Theta\lambda^3\mu + \Theta'\lambda^2\mu^2 + \Theta''\lambda\mu^3 + h\mu^4 = 0,$$

H et h désignant les hessiens des formes Q et q. Nous supposons, d'ailleurs, que les équations

$$Q = 0, \quad q = 0,$$

représentent de véritables quadriques et que, en particulier, les fonctions H et h sont différentes de zéro. L'équation (1) permet donc de calculer, pour le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, quatre valeurs : réelles, imaginaires, ou coïncidentes. Concluons enfin qu'il existe quatre cônes passant par les points communs à deux quadriques ; en sous-entendant que ces cônes peuvent être, suivant les cas proposés, réels, imaginaires, ou coïncidents.

224. Théorème. *Deux quadriques Q, q, étant données ; il existe, en général, quatre points jouissant de la propriété d'avoir le même plan polaire par rapport à ces deux surfaces.*

Ces quatre points sont les sommets des quatre cônes passant par les points communs à Q et à q.

Soient (x, y, z, t) les coordonnées d'un point M ayant le même plan polaire par rapport aux deux quadriques qui correspondent aux équations

$$Q = 0, \quad q = 0.$$

Les deux équations :

$$XQ'_x + YQ'_y + ZQ'_z + TQ'_t = 0,$$
$$Xq'_x + Yq'_y + Zq'_z + Tq'_t = 0,$$

devant représenter le même plan, on doit avoir

$$\lambda Q'_x + \mu q'_x = 0, \quad \lambda Q'_y + \mu q'_y = 0, \quad \lambda Q'_z + \mu q'_z = 0, \quad \lambda Q'_t + \mu q'_t = 0.$$

Ces équations, linéaires et homogènes, par rapport aux lettres x, y, z, t, devant être vérifiées par une solution non nulle, leur déterminant général est nul. Ce déterminant étant précisément le discriminant de la forme $\lambda Q + \mu q$, on trouve, de nouveau, la condition

$$\rho = 0.$$

Il y a donc quatre points tels que M (du moins dans le cas

général) et ces points sont justement ceux que nous avons rencontrés dans le paragraphe précédent. Nous allons expliquer tout à l'heure cette coïncidence.

Ces points $M_0\,M_1\,M_2\,M_3$ forment un tétraèdre qui est dit *conjugué* aux deux quadriques.

En général, un tétraèdre est conjugué, ou *autopolaire*, par rapport à une quadrique, lorsque chacune de ses faces a pour pôle, relativement à cette surface, le sommet opposé.

225. Théorème. *Le plan polaire* P *de l'un des points* M, *précédemment trouvés, est le même pour toutes les quadriques qui correspondent à l'équation*

$$(1) \quad \lambda' Q + \mu' q = 0\,;$$

μ' et λ' étant des nombres variables.

Le plan polaire de M_0 (x_0, y_0, z_0, t_0), par rapport à la quadrique qui correspond à l'équation (1), est

$$(2) \quad X\left(\lambda' Q'_{x_0} + \mu' q'_{x_0}\right) + Y\left(\lambda' Q'_{y_0} + \mu' q'_{y_0}\right) + Z\left(\lambda' Q_{z_0} + \mu' q'_{z_0}\right) + T\left(\lambda' Q'_{t_0} + \mu' q'_{t_0}\right) = 0.$$

On a, d'ailleurs,

$$\lambda Q'_{x_0} + \mu q'_{x_0} = 0, \qquad \lambda Q'_{y_0} + \mu q'_{y_0} = 0,$$
$$\lambda Q'_{z_0} + \mu q'_{z_0} = 0, \qquad \lambda Q'_{t_0} + \mu q'_{t_0} = 0.$$

L'équation (2) donne donc, par combinaison avec ces relations,

$$(\lambda\mu' - \mu\lambda')\left(Xq'_{x_0} + Yq'_{y_0} + Yq'_{z_0} + Tq'_{t_0}\right) = 0\,;$$

et cette égalité prouve que P_0, plan polaire de M_0, est le même pour toutes les quadriques (1).

226. Théorème. *Le plan polaire de* M_0, *par rapport à toutes les quadriques* (1), *est le plan* $M_1\,M_2\,M_3$.

En effet, considérons les trois cônes qui ont pour sommets les points M_1, M_2, M_3, surfaces qui peuvent être considérées

comme correspondant à l'équation (1), pour des valeurs particulières, et convenablement déterminées, des paramètres λ', μ'. Le plan polaire de M_0 par rapport à chacune de ces cônes, passe, évidemment, par son sommet; ceci établit la proposition.

227. Théorème. *Lorsque deux coniques* α *et* β, *situées dans l'espace, ont deux points communs* C *et* D, *on peut faire passer par ces courbes deux cônes du second ordre.*

Prenons les plans de α et de β pour plans de coordonnées ; le plan XOY étant un plan quelconque, coupant CD.

Les équations des coniques proposées sont

$$Ax^2 + z^2 + 2B'zx + 2Cx + 2mz + p = 0,$$
$$A'y^2 + z^2 + 2Byz + 2C'y + 2mz + p = 0,$$

et l'équation générale des quadriques qui ont pour traces ces courbes α et β, sur les plans ZOX, ZOY, est

$$(1)\quad Ax^2 + A'y^2 + z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2\lambda xy + 2Cx + 2C'y + 2mz + p = 0,$$

λ désignant un paramètre variable. Pour que cette équation représente un cône, il est nécessaire que son hessien soit nul ; écrivons donc

$$\begin{vmatrix} A & \lambda & B' & C \\ \lambda & A' & B & C' \\ B' & B & 1 & m \\ C & C' & m & p \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du second degré en λ, et le coefficient de λ^2 est égal à $m^2 - p$. Si nous supposons que les points C et D soient distincts, il y a deux cônes (réels ou imaginaires) passant par α et β.

Lorsque les points C et D deviennent coïncidents, le terme en λ^2 disparaît et il n'y a plus qu'un cône passant par les deux coniques ; l'autre cône, correspondant à une valeur infinie de λ, se réduit, d'après l'équation (1), aux deux plans passant par les coniques. Cette propriété résulte encore des considérations géométriques suivantes.

228. Considérons les deux coniques α et β, situées dans les deux plans U et V, mais ayant deux points communs C et D ; si nous menons à ces coniques des tangentes parallèles à CD, nous obtenons quatre points de contact A, A′ ; B, B′ ; et ces deux points étant joints, deux à deux, déterminent un quadrilatère complet. Il faut en effet observer ici que les droites AA′ et BB′ (diamètres conjugués des cordes parallèles à CD) passent, l'une et l'autre, par le milieu de cette droite ; les quatre points considérés sont donc dans un même plan et, étant joints deux à deux, comme nous venons de le dire, donnent trois points T, S, ω ; celui-ci étant le milieu de CD.

Ceci posé, nous allons montrer que les coniques α et β appartiennent à un même cône ayant pour sommet, soit le point S, soit le point T.

Pour le démontrer, imaginons le cône Σ qui a pour sommet S et pour directrice α, ce cône coupe le plan V suivant une conique que nous désignerons par β' ; et nous allons établir que β' se confond avec β.

Nous voyons d'abord que β' passe par les quatre points B, B′, C, D ; cherchons la tangente à β' au point B. Cette droite

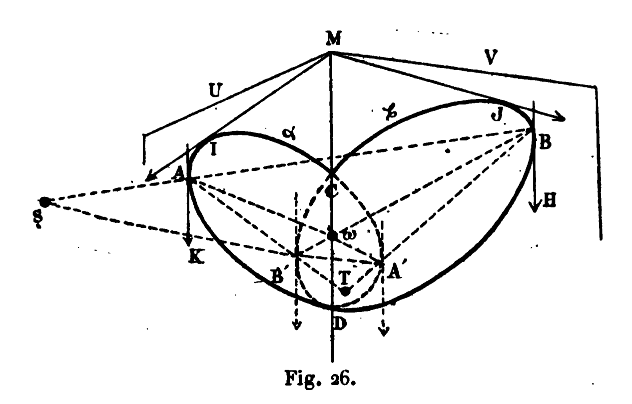


Fig. 26.

est l'intersection de V avec le plan tangent à Σ, le long de SB ; mais ce plan tangent est déterminé par SAB et par la tangente AK ; comme BH est parallèle à AK, on peut dire que

SBH est le plan tangent à Σ au point B. Ainsi, la droite BH est la tangente à 6′ au point B ; les coniques 6 et 6′ ont donc cinq points communs, savoir : 1° les points C, D, B′ ; 2° deux points confondus avec B, sur BH ; ces deux coniques coïncident donc.

229. Lorsque les points C, D sont confondus, le cône qui a pour sommet le point T coïncide alors avec le système des deux plans U et V. Il ne reste plus, comme l'a montré l'analyse, qu'un seul cône ayant pour sommet un certain point, représentant la position limite de S.

Pour déterminer cette position limite, on peut observer que le cône Σ peut être engendré de la manière suivante. Ayant pris un point M sur CD ; si, par M, on mène des tangentes

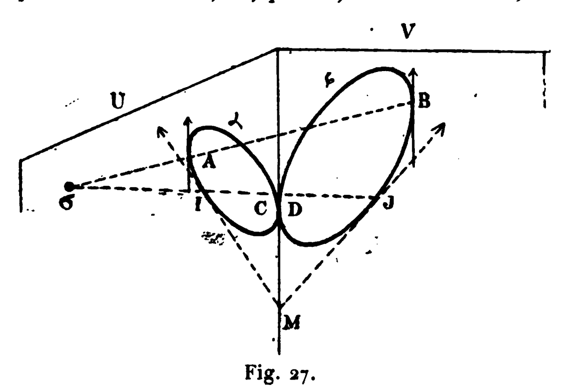


Fig. 27.

aux coniques α, 6, la droite qui joint les points de contact passe constamment par les points S, ou T. Nous avons en effet démontré que les droites joignant S à un point I de α coupait le plan V en un point J situé sur 6. En ces points correspondants I, J, on peut mener les tangentes aux coniques proposées ; et ces droites coupent CD au même point M, ce point étant celui qui est commun à CD, et au plan tangent à Σ le long de la génératrice SIJ.

C'est en appliquant cette remarque qu'on peut déterminer, comme l'indique la figure ci-dessus, le point σ, position limite du point S.

230. Théorème. *Lorsque deux quadriques ont cinq points communs dans un plan, l'intersection se compose de deux coniques.*

Soient A, B, C, D, E les cinq points communs à deux quadriques Q, q, points situés dans un plan P ; ce plan coupe Q suivant une conique Γ qui passe par les cinq points, et q suivant une conique γ passant, elle aussi, par ces points. Nous concluons de là que les coniques Γ et γ se confondent.

Cette remarque étant faite, prenons le plan P pour plan XOY; les équations des quadriques Q et q doivent donner la même courbe (Γ ou γ) quand nous supposons $z = 0$. Soit $\varphi = 0$, l'équation de Γ (ou de γ) dans le plan XOY ; U et V désignant des formes linéaires des lettres x, y, z, nous aurons :

$$(1) \quad zU = \varphi, \qquad (2) \quad zV = \varphi,$$

pour représenter les équations des quadriques considérées. Pour chercher les points communs à ces surfaces, nous devons résoudre (1) et (2) ; ou l'une d'elles, avec l'équation

$$(3) \quad z(U - V) = 0,$$

obtenue par la combinaison des relations (1) et (2). Les points communs à Q et à q sont donc situés dans le plan YOX, ou dans celui qui correspond à l'équation

$$U - V = 0 ;$$

la propriété en question se trouve ainsi établie.

On l'énonce encore quelquefois en disant que : *dans l'intersection de deux quadriques, si la courbe d'entrée est plane, la courbe de sortie l'est aussi.*

231. Définitions. On dit que *deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre*, lorsqu'elles admettent le même plan tangent, en tous les points qui leur sont communs.

Deux quadriques sont *simplement tangentes* lorsqu'elles ont le même plan tangent en un point commun ; cette propriété n'ayant lieu pour aucun des autres points communs.

Elles sont *bi-tangentes*, lorsqu'elles sont tangentes en deux points.

Nous montrerons tout à l'heure que cette propriété ne peut avoir lieu pour trois points que si les quadriques sont circonscrites.

232. Théorème. *Les équations de deux quadriques étant*

$$Q = 0, \qquad q = 0,$$

si l'on pose

$$P = ax + by + cz + dt,$$

et si l'on a

$$(1) \quad Q = \lambda q + P^2,$$

les deux surfaces considérées sont circonscrites, l'une à l'autre, le long d'une courbe plane.

Soit M_0 un point commun à Q et à q; le plan tangent Π, à Q, en ce point M_0, a pour équation

$$(2) \quad xQ'_{x_0} + yQ'_{y_0} + zQ'_{z_0} + tQ'_{t_0} = 0;$$

et, d'autre part, l'équation

$$(3) \quad xq'_{x_0} + yq'_{y_0} + zq'_{z_0} + tq'_{t_0} = 0,$$

représente le plan Π' tangent à q, au même point M_0.

D'ailleurs, l'identité (1) donne

$$(4) \quad Q'_x = \lambda q'_x + 2aP, \quad \text{et} \quad Q_0 = \lambda q_0{}^2 + P_0{}^2;$$

le point M_0 étant commun aux deux quadriques, on a :

$$Q_0 = 0, \qquad q_0 = 0; \quad \text{et, par suite,} \quad P_0 = 0.$$

L'identité (4) prouve donc que

$$Q'_{x_0} = \lambda q'_{x_0}.$$

Cette remarque s'appliquant aux autres dérivées partielles on voit ainsi, finalement, que les égalités (2) et (3) représentent le même plan.

233. Théorème. *Lorsque deux quadriques* Q,q, *ont trois points communs* A, B, C ; *si les plans tangents* α, β, γ, *en ces points, sont les mêmes ; les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, le long d'une courbe plane.*

Le plan ABC coupe les plans α,β,γ, suivant trois droites A′, B′, C′ ; et les quadriques Q, q, suivant deux coniques Σ, σ, qui sont inscrites au triangle ABC, aux points A′,B′,C′. On conclut de là que ces coniques Σ, σ, se confondent, et en désignant par S cette conique, on peut dire, déjà, que S est une courbe commune aux deux quadriques.

Montrons maintenant que Q et q n'ont aucun point commun, en dehors de S.

Soit M un point situé sur Q et sur q. Le plan MAB coupe α suivant une droite α', et β suivant une droite β'. Appelons Σ', σ' les coniques communes au plan MAB et, respectivement, aux quadriques Q et q. Σ' passe par M, puis par A et B, tangentiellement aux droites α', β' ; cette remarque s'applique à σ' ; d'où l'on déduit que Σ' et σ' se confondent.

En raisonnant ainsi sur les plans MAB, MBC, MCA, on voit que si M était un point non situé sur S, Q et q auraient quatre coniques communes ; ce qui n'est pas possible.

Les quadriques considérées n'ont donc aucun point commun en dehors de S et il est facile de vérifier maintenant qu'elles se touchent mutuellement tout le long de cette courbe.

L'équation

$$Q - \lambda q = 0,$$

qui représente l'équation générale des quadriques passant par les points communs aux surfaces considérées, doit, pour une valeur convenable de λ, se réduire à P^2; $P = 0$ représentant l'équation du plan ABC. En effet, s'il en était autrement, les

quadriques auraient en dehors du plan ABC des points communs (réels, imaginaires, ou rejetés à l'infini), ce qui n'est pas possible comme nous l'avons observé.

Nous avons donc

$$Q - \lambda q \equiv P^2,$$

et cette identité établit (§ 232) que les surfaces considérées sont circonscrites l'une à l'autre.

234. Théorème. *Lorsque deux quadriques* Q, q *se coupent suivant une courbe qui se décompose en deux coniques* Γ, γ, *elles sont bi-tangentes.*

Les coniques Γ et γ sont situées dans deux plans P, p, qui se coupent suivant une droite rencontrant les quadriques proposées aux mêmes points A et B. Le plan tangent à Q, au point A, est déterminé par les tangentes, en ce point, aux coniques Γ, γ; il est donc le même pour Q et pour q. Cette remarque s'applique au point B; les deux quadriques Q, q, sont donc bi-tangentes.

On peut d'ailleurs reconnaître analytiquement cette propriété.

Soient

$$Q = 0, \qquad q = 0,$$

les équations des deux quadriques ; celles-ci se coupant suivant deux courbes planes, on a donc

$$q \equiv \lambda Q + UV,$$

U et V représentant deux formes linéaires. Les équations

$$U = ax + by + cz + dt = 0, \quad V = a'x + b'y + c'z + d't = 0,$$

représentent une droite qui rencontre les quadriques considérées en deux points A, B, communs à ces surfaces. Si l'on représente par (x_0, y_0, z_0, t_0) les coordonnées du point A, on a

$$U_0 = 0, \quad V_0 = 0, \quad Q_0 = 0, \quad q_0 = 0;$$

et l'identité

$$q'_x = \lambda Q'_x + aV + a'U,$$

donne

$$q'_{x_0} = \lambda Q'_{x_0}.$$

En appliquant cette remarque aux quatre dérivées partielles, on voit que les plans tangents, au point A, aux deux quadriques, coïncident.

235. Théorème. *Lorsque deux quadriques sont bitangentes elles se coupent suivant deux courbes planes.*

Montrons d'abord que l'équation

$$(\Sigma) \quad \lambda P^2 + \mu PR + \nu R^2 = UV,$$

dans laquelle λ, μ, ν sont des paramètres variables; (P, R, U, V étant des formes linéaires à coefficients constants) représente l'équation générale des quadriques tangentes, en deux points fixes, aux plans qui correspondent aux équations $U = 0$, $V = 0$. A cet effet, considérons les équations

$$(1) \quad P = 0, \quad R = 0, \quad U = 0,$$

et supposons qu'elles admettent une solution unique et finie (x_0, y_0, z_0, t_0), ce qui est le cas général. Nous avons alors

$$P_0 = 0, \quad R_0 = 0, \quad U_0 = 0,$$

et, en appliquant l'équation de Plücker (§ 91), après l'avoir prise sous la forme

$$P_0 f'_P + R_0 f'_R + U_0 f'_U + V_0 f'_V = 0,$$

nous obtenons

$$V_0 U = 0,$$

ou

$$(2) \quad U = 0,$$

en supposant $V_0 \neq 0$, hypothèse qui rentre encore dans le cas

général, le seul que nous voulions examiner ici. Ainsi, la surface proposée Σ est tangente au plan (2) en un point A, déterminé sur ce plan, et dont les coordonnées vérifient les équations (1). Le même raisonnement établit que Σ est tangente au plan ($V = 0$), en un point B, dont les coordonnées se calculent en résolvant les équations

$$(1') \quad P = 0, \quad R = 0, \quad V = 0.$$

Enfin, si l'on observe que l'équation (Σ) renferme *trois* paramètres variables et indépendants, une quadrique pouvant remplir neuf conditions et Σ étant assujettie à *six* conditions simples, on voit que (Σ) est bien l'équation générale.

Ceci posé, l'équation (Σ) et la suivante :

$$(\Sigma') \quad \lambda' P^2 + \mu' PR + \nu' R^2 = UV,$$

donnent, par combinaison,

$$(\lambda - \lambda') P^2 + (\mu - \mu') PR + (\nu - \nu') R^2 = 0.$$

Cette équation représente deux plans (réels ou imaginaires) se coupant, suivant la droite Δ qui correspond aux équations

$$P = 0, \quad R = 0;$$

cette droite est donc celle qui joint les deux points de contact.

C'est pour ce motif que deux quadriques ne peuvent avoir trois plans tangents communs, avec les mêmes points de contact, sans être circonscrites l'une à l'autre.

236. Remarque. On peut aussi observer que si deux quadriques ($Q = 0$, $q = 0$) sont bi-tangentes, on a

$$Q = \alpha q + \lambda P^2 + \mu PR + \nu R^2.$$

HOMOTHÉTIE ET SIMILITUDE

237. La transformation homothétique, que nous avons définie dans la géométrie plane (§ 187), s'applique, avec des modifications évidentes, à la géométrie de l'espace.

Les formules de transformation sont ici

$$\frac{X-\alpha}{x}=\frac{Y-\beta}{y}=\frac{Z-\gamma}{z}=K,$$

et si nous appliquons ces formules à l'équation générale des quadriques, nous voyons que les équations

$$F=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+D=0,$$
$$f=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy+2cx+2c'y+2c''z+d=0,$$

représentent deux quadriques homothétiques, si les égalités

$$\frac{A}{a}=\frac{A'}{a'}=\frac{A''}{a''}=\frac{B}{b}=\frac{B'}{b'}=\frac{B''}{b''},$$

sont vérifiées. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes. Elles prouvent entre autres choses, que deux quadriques homothétiques ont leurs axes parallèles et que les longueurs de ces axes sont proportionnelles. En effet, les équations en S, qui correspondent aux deux équations proposées ont leurs racines proportionnelles. On voit aussi que les cônes asymptotes des deux quadriques sont égaux et que l'intersection de ces deux surfaces est une simple conique, située dans le plan qui a pour équation

$$aF-Af=0.$$

C'est par cette observation que l'homothétie se rattache à la question que nous avons développée dans cette leçon, et l'on peut dire que *deux quadriques sont homothétiques, lorsqu'elles se coupent suivant deux courbes planes, l'une de ces courbes étant rejetée à l'infini.*

Toutes ces remarques offrent l'analogie la plus parfaite avec celles que comporte la transformation homothétique dans un plan; mais voici, sur ce sujet, quelques propriétés qui appartiennent seulement à la géométrie de l'espace.

238. Théorème. *Lorsque deux courbes* U, V, *situées dans un plan* P, *sont homothétiques; leurs projections* U', V', *sur un plan* P' (*projections droites ou obliques*), *sont aussi homothétiques; et réciproquement.*

En effet les rayons vecteurs correspondants ρ, σ, des courbes U et V étant parallèles, leurs projections ρ' σ' sur P′ sont deux droites parallèles. On voit d'ailleurs immédiatement que les rayons projetés ρ', σ' sont proportionnels aux longueurs ρ et σ. Le rapport $\frac{\rho}{\sigma}$ étant constant, il en est donc de même du rapport $\frac{\rho'}{\sigma'}$; les courbes U′, V′, sont donc homothétiques.

La réciproque est vraie; si les projections U′ et V′ sont homothétiques, les courbes U et V sont nécessairement homothétiques ; et ceci n'est pas, à proprement parler, une réciproque, mais bien une application du théorème direct, puisqu'on peut considérer U et V comme les projections obliques des courbes U′ et V′, sur le plan P.

Le théorème subsiste évidemment quand les courbes U et V sont situées dans des plans parallèles, et les projections peuvent même être faites sur des plans différents, mais parallèles.

239. Théorème. *Les sections faites dans une quadrique par des plans parallèles sont des coniques homothétiques.*

Prenons l'équation du plan sécant sous la forme:

$$z = mx + ny + \lambda,$$

m et n représentant des paramètres fixes, λ étant seul variable. La projection de l'intersection sur le plan XOY a pour équation

$$\varphi(x,y,mx+ny+\lambda)+2Cx+2C'y+2C''(mx+ny+\lambda)+D=0.$$

L'ensemble des termes du second degré est constitué par la forme $\varphi(x, y, mx+ny)$; le paramètre λ n'entrant pas dans cette expression, les projections des sections considérées sont homothétiques, cette propriété appartient donc aussi aux coniques situées dans l'espace (§ 238).

240. Théorème. *Les sections faites par un même plan (ou par deux plans parallèles) dans deux quadriques homothétiques sont des courbes homothétiques.*

En effet, les équations des deux quadriques peuvent être prises sous la forme :

$$Q = \varphi + P, \qquad q = K\varphi + p,$$

K désignant le rapport des coefficients des termes du second degré. Le raisonnement que nous avons fait au paragraphe précédent s'applique à ces deux équations; les termes du second degré dans l'équation de la projection seront constitués par la forme $\varphi\ (x, y, mx + ny)$, pour la première; et par $K\ \varphi\ (x, y, mx + ny)$, pour la seconde. D'où l'on conclut que ces projections, et par suite les sections planes considérées, sont des coniques homothétiques.

241. Corollaire. *Les sections faites par un plan dans une quadrique et dans son cône asymptote, sont des coniques homothétiques.*

Cette propriété résulte immédiatement du théorème précédent, en observant que le cône asymptote représenté par l'équation $\varphi = 0$, peut être considéré comme une quadrique homothétique à la proposée.

Cette propriété est souvent employée pour exprimer que les sections faites dans une quadrique affectent une certaine forme. Si l'on prend, par exemple, l'équation générale des plans tangents au cône asymptote; tout plan parallèle coupera la quadrique suivant une parabole. Dans d'autres cas, si l'on exprime, comme nous le montrerons dans la leçon prochaine, qu'un plan coupe ce cône suivant deux droites rectangulaires; les plans parallèles à celui-ci couperont la quadrique correspondante suivant une hyperbole équilatère.

242. Similitude de deux quadriques. La définition que nous avons donnée de la similitude, dans la géométrie plane (§ 190), s'applique à l'espace et on dit que deux surfaces Σ, Σ' sont semblables lorsqu'en déplaçant l'une d'elles on peut l'amener à être homothétique à l'autre.

Deux quadriques étant homothétiques lorsque leurs axes sont parallèles et ont des longueurs proportionnelles, on voit donc que *deux quadriques seront semblables lorsque les longueurs des axes seront proportionnelles.*

En formant les équations en S qui correspondent aux équations des quadriques proposées :

$$S^3 + IS^2 + JS + \Delta = 0,$$
$$s^3 + is^2 + js + \delta = 0,$$

et, en écrivant que les racines sont proportionnelles, on a

$$I = ti, \qquad J = t^2 j, \qquad \Delta = t^3 \delta.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux quadriques soient semblables sont donc :

$$\frac{I^2}{J} = \frac{i^2}{j}, \quad \text{et} \quad \frac{IJ}{\Delta} = \frac{ij}{\delta}.$$

EXERCICES

1. *Lorsque deux quadriques ont un plan tangent commun* P *et le même point de contact O,*

1° *Ce point* O *est le sommet de l'un des cônes qui passent par la courbe d'intersection des deux quadriques;*

2° *Les quatre cônes que l'on trouve dans le cas général se réduisent à trois.*

En prenant pour origine le point O et pour plan XOY le plan P, les équations des quadriques s'écrivent

$$q = \varphi + z = 0, \qquad Q = \Phi + z = 0$$

et le discriminant de la forme $Q + Kq$ est

$$\begin{vmatrix} A + Ka; & B'' + Kb'', & B' + Kb', & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & 1 + K \\ 0 & 0 & 1 + K & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On aperçoit ainsi la racine double -1.

2. *Si deux quadriques ont deux droites* Δ, Δ' *communes, et non situées dans le même plan, leur intersection se compose de quatre droites.*

(Steiner.)

La courbe commune aux deux quadriques se compose de Δ, de Δ' et d'une courbe du second ordre, ou de deux autres droites. La première hypothèse doit être rejetée; car, si la courbe d'entrée est plane, la courbe de sortie l'est pareillement.

3. *Démontrer que les équations*

$$P=0,\quad U=0,\quad V=0,\quad W=0,$$

représentant quatre plans formant un véritable tétraèdre, l'équation

$$\alpha P^2+\beta U^2+\gamma V^2+\delta W^2=0,$$

représente l'équation générale des quadriques conjuguées au tétraèdre.

4. Théorème de Frégier. *Si un trièdre trirectangle tourne autour d'un point fixe* M *pris sur une quadrique* Q, *le plan qui passe par les extrémités des trois cordes formées par les arêtes de ce trièdre passe par un point fixe* μ, *situé sur la normale à* Q, *au point* M.

5. *On suppose que le point* M, *considéré dans l'exercice précédent, soit mobile sur l'ellipsoïde qui correspond à l'équation* (axes rectangulaires)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

démontrer que le lieu décrit par le point μ, *correspondant à* M, *a pour équation :*

$$\frac{\frac{x^2}{a^2}}{\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)^2}+\frac{\frac{y^2}{b^2}}{\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2}+\frac{\frac{z^2}{c^2}}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)^2}.$$

6. Théorème. *Considérons une quadrique* Q *de centre* O *et prenons sur* Q *deux points quelconques* A, B ; *soient* P *et* R *les plans tangents à* Q, *en ces points. Si par* O *on mène des plans* P', R' *parallèles à ceux-ci,* P' *et* R' *coupent* AB *en des points* A', *et* B' ; *les longueurs* AA', BB' *sont égales.*

(Laguerre.)

7. *En désignant par*

$$P=0,\quad U=0,\quad V=0,\quad W=0,$$

les équations des faces du tétraèdre de référence, démontrer :

1° *Que l'équation générale des quadriques circonscrites au tétraèdre est*

$$\lambda PU+\mu PV+\nu PW+\lambda' UV+\mu' VW+\nu' WU=0;$$

2° *Que*

$$\lambda UV + \mu PW = 0,$$

est l'équation générale des quadriques passant par les côtés du quadrilatère gauche constitué par quatre arêtes consécutives du tétraèdre.

8. *Trouver la condition que doivent remplir les coefficients* λ, μ, ν *pour que l'équation*

$$\alpha^2P^2 + \beta^2U^2 + \gamma^2V^2 + \delta^2W^2 + 2\lambda(\alpha\beta PU + \gamma\delta VW) + 2\mu(\alpha\gamma PV + \beta\delta UW)$$
$$+ 2\nu(\alpha\delta PW + \beta\gamma UV) = 0,$$

représente une quadrique inscrite au tétraèdre de référence.

En exprimant que l'intersection avec le plan ($P = 0$) est une variété de conique, on égale à zéro le discriminant de la forme quadratique en U, V, W et l'on a, pour la condition cherchée

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & 1 & \nu \\ \mu & \nu & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2\lambda\mu\nu - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 0.$$

9. *Si l'on considère les droites* Δ, Δ', *non situées dans le même plan, et correspondant aux équations :*

$$\Delta \begin{cases} P = 0, \\ U = 0; \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} V = 0, \\ W = 0; \end{cases}$$

démontrer que

$$\alpha PV + \beta UW + \gamma PW + \delta UV = 0,$$

représente l'équation générale des quadriques passant par Δ et Δ'.

Cette équation est en défaut dans le cas où Δ et Δ' sont situées dans un même plan. Le nombre des conditions imposées est, dans ce cas, seulement égal à cinq. En prenant pour axes les bissectrices de Δ et de Δ' et la normale au plan $\Delta\Delta'$, l'équation générale est alors

$$y^2 - m^2x^2 - z(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0.$$

10. Théorème de Binet. *Lorsque deux quadriques admettent un plan diamétral commun, la projection de leur intersection, sur ce plan, projection faite parallèlement à la direction conjuguée de ce plan, est une conique.*

11. *Reconnaître que l'équation générale des quadriques tangentes aux six arêtes du tétraèdre de référence est*

$$\alpha^2P^2 + \beta^2U^2 + \gamma^2V^2 + \delta^2W^2 - 2\alpha\beta PU - 2\alpha\gamma PV - 2\alpha\delta PW - 2\beta\gamma UV$$
$$- 2\beta\delta UW - 2\gamma\delta VW = 0.$$

12. *On demande à combien de conditions est assujettie une quadrique satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Elle passe par une droite* Δ *et une conique* Γ *rencontrant* Δ.

2° *Elle passe par une conique* Γ *et par deux droites* Δ, Δ′, *rencontrant* Γ *en des points différents.*

3° *Elle passe par* Γ, *et par les droites* Δ, Δ′ ; *celles-ci rencontrant* Γ *au même point.*

Trouver, dans les différents cas, l'équation de la quadrique.

13. Théorème. *Quand deux quadriques sont de révolution autour de deux droites parallèles* Δ, Δ′ ; *si le plan principal qui est perpendiculaire à ces droites est commun aux deux surfaces considérées, leur intersection se projette, sur ce plan, suivant une circonférence.*

VINGTIÈME LEÇON

APPLICATIONS DIVERSES. — THÉORÈMES D'APOLLONIUS

Avant d'aborder, comme nous le ferons dans la leçon suivante, l'étude des quadriques, d'après leurs équations réduites, nous nous proposons d'appliquer quelques-unes des théories que nous avons exposées jusqu'ici, à des exercices divers.

243. Théorème. *Lorsque le plan qui correspond à l'équation*

$$mx + ny + pz = 0,$$

coupe un cône C, *suivant deux droites rectangulaires* Δ, Δ', *l'équation de ce cône étant*

$$(c)\quad f(x,y,z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

on a

$$(A + A' + A'')(m^2 + n^2 + p^2) = f(m,n,p);$$

et réciproquement.

En effet, soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'},$$

les équations des droites Δ et Δ'; la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles soient rectangulaires est

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Si l'on cherche les projections Δ et de Δ′ sur le plan XOZ, on trouve, pour les déterminer, l'équation

$$x^2(\mathrm{A}n^2+\mathrm{A}'m^2-2\mathrm{B}''mn)+z^2(\mathrm{A}'p^2+\mathrm{A}''n^2-2\mathrm{B}pn)+\ldots=0.$$

On a donc

$$\frac{\alpha\alpha'}{\mathrm{A}'p^2+\mathrm{A}''n^2-2\mathrm{B}'pn}=\frac{\gamma\gamma'}{\mathrm{A}n^2+\mathrm{A}'m^2-2\mathrm{B}''mn},$$

On trouve, de même,

$$\frac{\beta\beta'}{\mathrm{A}p^2+\mathrm{A}''m^2-2\mathrm{B}'mp}=\frac{\gamma\gamma'}{\mathrm{A}n^2+\mathrm{A}'m^2-2\mathrm{B}''mn}.$$

La condition cherchée est donc :

$$\mathrm{A}'p^2+\mathrm{A}''n^2-2\mathrm{B}pn+\mathrm{A}p^2+\mathrm{A}''m^2-2\mathrm{B}'mp+\mathrm{A}n^2+\mathrm{A}'m^2-2\mathrm{B}''mn=0,$$

égalité qu'on peut écrire sous la forme :

$$(\mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{A}'')(m^2+n^2+p^2)=f(m,n,p).$$

244. Théorème. *Pour que l'on puisse inscrire un trièdre trirectangle sur un cône du second ordre* (1), *il est nécessaire et suffisant que la somme des coefficients des termes en x^2, y^2, et z^2, soit nulle.*

Montrons d'abord que la condition est nécessaire. Les équations des arêtes du trièdre étant

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},\quad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'},\quad \frac{x}{\alpha''}=\frac{y}{\beta''}=\frac{z}{\gamma''},$$

en exprimant que ces droites sont sur le cône, on a :

$$\mathrm{A}\alpha^2+\mathrm{A}'\beta^2+\mathrm{A}''\gamma^2+2\mathrm{B}\beta\gamma+2\mathrm{B}'\alpha\gamma+2\mathrm{B}''\alpha\beta=0,$$
$$\mathrm{A}\alpha'^2+\mathrm{A}'\beta'^2+\mathrm{A}''\gamma'^2+2\mathrm{B}\beta'\gamma'+2\mathrm{B}'\alpha'\gamma'+2\mathrm{B}''\alpha'\beta'=0,$$
$$\mathrm{A}\alpha''^2+\mathrm{A}'\beta''^2+\mathrm{A}''\gamma''^2+2\mathrm{B}\beta''\gamma''+2\mathrm{B}'\alpha''\gamma''+2\mathrm{B}''\alpha''\beta''=0.$$

1. On dit qu'*un trièdre est inscrit à un cône* lorsque les trois arêtes du trièdre coïncident avec trois génératrices du cône.

Le trièdre est circonscrit au cône lorsque les trois faces de ce trièdre coïncident avec des plans tangents au cône.

En ajoutant ces égalités, et en tenant compte des relations connues [§ 21; formules $(\alpha)'$ et (β')], nous avons

$$A + A' + A'' = 0.$$

Réciproquement, si cette égalité est vérifiée, le cône proposé est capable d'une infinité de trièdres trirectangles inscrits.

En effet, soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

les équations d'une arête du cône; l'égalité :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

représente un plan perpendiculaire à cette droite.

Ce plan (§ 243) coupe le cône suivant deux droites rectangulaires, si l'on a

$$(A + A' + A'')(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Or, cette relation est vérifiée, puisque l'on a

$$A + A' + A'' = 0, \quad \text{et} \quad f(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Le cône que nous venons de considérer, et qui est capable de trièdres trirectangles inscrits, est quelquefois appelé *cône équilatère*.

245. Remarque. Lorsque l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

représente deux plans, si l'on suppose, en outre,

$$A + A' + A'' = 0,$$

les plans proposés sont rectangulaires. Ceci résulte, si l'on veut, de ce fait que l'on peut placer, sur la surface proposée, un trièdre trirectangle dont les arêtes soient situées dans les plans donnés; on le vérifie aussi, en observant que l'identité

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$
$$= (ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z),$$

et l'égalité

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

donnent

$$A + A' + A'' = 0.$$

246. Cônes supplémentaires. Si l'on imagine un cône C, le lieu des normales menées, par son sommet, à ses plans tangents, est un cône C' : ces deux cônes qui sont *réciproques*, comme nous le montrerons tout à l'heure, sont appelés *cônes supplémentaires*. Cherchons d'abord l'équation de C'.

Le plan qui correspond à l'équation

$$\text{(P)} \quad mx + ny + pz = 0,$$

est tangent au cône C, quand l'égalité

$$\begin{vmatrix} A & B'' & B' & m \\ B'' & A' & B & n \\ B' & B & A'' & p \\ m & n & p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

est vérifiée (§ 153).

Cette égalité développée devient :

$$m^2(A'A'' - B^2) + n^2(AA'' - B'^2) + p^2(AA' - B''^2) + 2np(AB - B'B'') + 2mp(A'B' - BB'') + 2mn(A''B'' - BB') = 0,$$

ou, en introduisant la notation des mineurs de Δ,

$$(1) \quad am^2 + a'n^2 + a''p^2 - 2bnp - 2b'mp - 2b''mn = 0.$$

La normale au plan (P) est représentée par les équations

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p},$$

et le lieu décrit par cette droite est un cône du second ordre correspondant à l'équation

$$(c') \quad F(x,y,z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 - 2byz - 2b'zx - 2b''xy = 0.$$

Pour établir la réciprocité des cônes C et C′ (réciprocité qui, géométriquement, est rendue manifeste, par la considération de deux plans, tangents au cône C, et infiniment voisins), il faut montrer qu'en cherchant le cône supplémentaire de C′, on retrouve le cône C, lui-même.

Or, ceci résulte des identités :

$$aa' - b''^2 \equiv A''\Delta, \quad a'a'' - b^2 \equiv A\Delta, \quad a''a - b'^2 \equiv A'\Delta;$$
$$a''b'' - bb' \equiv B''\Delta, \quad ab - b'b'' \equiv B\Delta, \quad a'b' - b''b \equiv B'\Delta;$$

identités que nous avons signalées en Algèbre (p. 656), qui ont été encore appliquées précédemment (§ 153), et que l'on peut, d'ailleurs, vérifier immédiatement.

247. Théorème. *Étant donnée une droite Δ dont les équations sont*

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse mener, par cette droite, deux plans tangents rectangulaires au cône (C), *est :*

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)J = F(\alpha, \beta, \gamma);$$

en posant, comme nous l'avons déjà fait,

$$J \equiv AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2 \equiv a + a' + a'',$$

et

$$F(x, y, z) \equiv x^2(A'A'' - B^2) + y^2(AA'' - B'^2) + z^2(AA' - B''^2)$$
$$+ 2yz(AB - B'B'') + 2zx(A'B' - BB'') + 2xy(A''B'' - BB').$$

Imaginons un plan P tangent au cône (C) et correspondant à l'équation

$$mx + ny + pz = 0.$$

Nous avons aussi

$$m\alpha + n\beta + p\gamma = 0,$$

puisque P passe par Δ. Ces deux égalités donnent

$$\frac{m}{\gamma y - \beta z} = \frac{n}{\alpha z - \gamma x} = \frac{p}{\beta x - \alpha y}.$$

La relation (1), établie au paragraphe précédent, devient donc :

$$a(\gamma y - \beta z)^2 + a'(\alpha z - \gamma x)^2 + a''(\beta x - \alpha y)^2 - 2b(\alpha z - \gamma x)(\beta x - \alpha y)$$
$$- 2b'(\gamma y - \beta z)(\beta x - \alpha y) - 2b''(\alpha z - \gamma x)(\gamma y - \beta z) = 0.$$

Pour que les deux plans qui correspondent à cette équation soient rectangulaires, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$a'\gamma^2 + a''\beta^2 + 2b\beta\gamma + a\gamma^2 + a''\alpha^2 + 2b'\alpha\gamma + a\beta^2 + a'\alpha^2 + 2b''\alpha\beta = 0,$$

ou

$$(a + a' + a'')(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = F(\alpha, \beta, \gamma).$$

248. Théorème. *La condition nécessaire et suffisante, pour qu'un cône du second ordre soit capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, est*

$$J = 0.$$

Considérons, en effet, un trièdre qui soit circonscrit au cône (C), et dont les arêtes aient pour équations, respectivement,

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'}, \quad \frac{x}{\alpha''} = \frac{y}{\beta''} = \frac{z}{\gamma''}.$$

Par chacune de ces droites on peut mener à (C) deux plans tangents rectangulaires et l'on a

$$J(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = a\alpha^2 + a'\beta^2 + a''\gamma^2 - 2b\beta\gamma - 2b'\alpha\gamma - 2b''\alpha\beta,$$
$$J(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2) = a\alpha'^2 + a'\beta'^2 + a''\gamma'^2 - 2b\beta'\gamma' - 2b'\alpha'\gamma' - 2b''\alpha'\beta',$$
$$J(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) = a\alpha''^2 + a'\beta''^2 + a''\gamma''^2 - 2b\beta''\gamma'' - 2b'\alpha''\gamma'' - 2b''\alpha''\beta''.$$

Les coefficients, α, β, γ ; α', β', γ' ; $\alpha'', \beta'', \gamma''$; représentent, si l'on veut, les cosinus directeurs des arêtes du trièdre tri-

rectangle considéré, et si nous ajoutons les trois égalités précédentes, nous avons, après simplifications,

$$3J = J,$$

ou,

$$J = 0.$$

Réciproquement, si l'on suppose que J soit nul, le cône considéré (C) est capable d'une infinité de trièdres trirectangles circonscrits.

En effet, considérons un plan P tangent à (C), et soient

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

les équations de la normale Δ à ce plan. Cette droite appartient au cône (C') et l'on a, par conséquent,

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

D'autre part, on suppose $J = 0$; ainsi la relation

$$J(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = F(\alpha, \beta, \gamma),$$

est vérifiée. Ceci prouve que les plans menés par Δ et tangents à (C), sont rectangulaires.

249. Cônes conjugués. Les cônes supplémentaires dont nous venons de nous occuper peuvent être considérés comme constituant un cas particulier des cônes conjugués, que nous allons définir.

Imaginons un cône D et, en même temps, une quadrique Q, à centre unique ; soit P un plan tangent à D et soit Δ le diamètre de Q qui est conjugué de P. Si, par le sommet de D, on mène une parallèle à Δ, le lieu décrit par cette parallèle est un cône D', qui est dit conjugué de D.

En remplaçant la quadrique Q par une sphère, on voit que l'on revient alors à l'idée des cônes supplémentaires.

Prenons pour origine le sommet de D, et pour axes de

coordonnées trois parallèles à trois diamètres conjugués de Q. L'équation de D étant

$$\text{(D)} \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0,$$

un plan P ayant pour équation

$$mx + ny + pz = 0,$$

est tangent à ce cône si l'on a, comme nous l'avons montré (§ 246),

$$am^2 + a'n^2 + a''p^2 - 2bpn - 2b'mp - 2b''mn = 0.$$

D'autre part, l'équation de Q étant

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

la parallèle au diamètre conjugué de P, menée par l'origine, correspond aux équations

$$\frac{\alpha x}{m} = \frac{\beta y}{n} = \frac{\gamma z}{p}.$$

Le lieu cherché est donc un cône du second ordre représenté par l'équation

$$\text{(D')} \quad a\alpha^2x^2 + a'\beta^2y^2 + a''\gamma^2z^2 - 2b\beta\gamma yz - 2b'\alpha\gamma xz - 2b''\alpha\beta xy = 0.$$

Deux cônes conjugués sont réciproques, car si l'on cherche le cône conjugué de (D') on retombe (au facteur près, $\alpha^2\beta^2\gamma^2\Delta$) sur le cône (D).

Nous terminerons cette leçon en établissant les théorèmes d'Apollonius dans le cas des quadriques à centre ; cette démonstration très simple est une application de l'équation en **S**.

250'. Théorèmes d'Apollonius. Considérons une quadrique Q, de la première classe, qui, rapportée à trois diamètres conjugués, a pour équation

$$\frac{x^2}{a'} + \frac{y^2}{b'} + \frac{z^2}{c'} = 1,$$

EXERCICES

1. *Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que le plan qui correspond à l'équation*

$$mx + ny + pz = 0,$$

coupe deux plans donnés P, Q, *suivant deux droites rectangulaires.*

Les équations des plans étant

$$ax + by + cz = 0, \qquad a'x + b'y + c'z = 0,$$

on considère l'équation

$$(ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z) = 0,$$

et, après avoir developpé le calcul indiqué, on lui applique la relation trouvée plus haut (§ 243).

2. *Trouver l'enveloppe des sphères qui touchent trois sphères fixes.*

En prenant des axes rectangulaires quelconques, les équations des sphères fixes étant

$$S_1 = 0, \qquad S_2 = 0, \qquad S_3 = 0,$$

on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & t_3 & t_2 \\ S_2 & t_3 & 0 & t_1 \\ S_3 & t_2 & t_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant ce déterminant, le résultat est :

$$t_1^2 S_1^2 + t_2^2 S_2^2 + t_3^2 S_3^2 - 2t_2 t_3 S_2 S_3 - 2t_3 t_1 S_3 S_1 - 2t_1 t_2 S_1 S_2 = 0.$$

égalité qui peut s'écrire encore

$$\sqrt{t_1 S_1} \pm \sqrt{t_2 S_2} \pm \sqrt{t_3 S_3} = 0.$$

Dans ces équations, les constantes t_1, t_2, t_3 sont données par les égalités

$$t_1 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - (R_2 - R_3)^2,$$
$$t_2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 - (R_3 - R_1)^2,$$
$$t_3 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (R_1 - R_2)^2;$$

R_1, R_2, R_3 sont les rayons des sphères fixes données ; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $(x_3, y_3\ z_3)$ désignent les coordonnées des centres respectifs.

La surface en question est connue sous le nom de **Cyclide de Dupin.** Si l'on cherche l'intersection de la cyclide avec une des sphères fixes proposées, on voit que cette intersection correspond aux deux équations.

$$S_1 = 0, \qquad t_3 S_2 - t_3 S_3 = 0.$$

Chacune de ces égalités représentant une sphère, on déduit de cette remarque le théorème suivant :

Quand une sphère mobile touche constamment trois sphères fixes ; chacun des points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe qui lui correspond.

Ce théorème remarquable est dû à *Dupuis ;* les résultats précédents ont été empruntés à une étude de *M. Neuberg* sur la cyclide de Dupin (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 2e série, t. X, 1884).

Les **surfaces cyclides**, dans le sens le plus général donné à ce mot, sont les surfaces du quatrième ordre qui passent doublement par le cercle de l'infini, ou, si l'on préfère, qui correspondent à l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + U(x^2 + y^2 + z^2) + Q = 0,$$

$Q = 0$, représentant une quadrique et U étant une forme linéaire et homogène. La cyclide de Dupin est un cas particulier de ces surfaces plus générales, qui ont été étudiées par M. Moutard (*Nouv. Annales*, 1864), et, après lui, par M. Darboux. (*Sur une classe remarquables de courbes et de surfaces algébriques :* Paris, Gauthier-Villars, 1873.)

Le tore, les podaires de quadriques, les transformées de quadriques par rayons vecteurs réciproques sont encore des exemples de surfaces cyclides.

3. *Démontrer que le lieu des centres des sphères tangentes à trois sphères fixes est un système de deux coniques.*

(Dupin.)



TROISIÈME LIVRE

ÉTUDE DES QUADRIQUES D'APRÈS LEURS ÉQUATIONS RÉDUITES

VINGT ET UNIÈME LEÇON

L'ELLIPSOIDE. (Les plans tangents.)

254. Nous avons montré, quand nous nous sommes occupé de la réduction de l'équation générale du second degré, que les surfaces que nous avons nommées **ellipsoïdes** pouvaient, par un choix convenable d'axes rectangulaires, être représentées par l'équation

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Nous nous proposons maintenant de tirer, de cette équation réduite, une étude des propriétés de la surface qui lui correspond.

255. Nous avons déjà indiqué (§ 140), et la figure ci-dessous la rappelle, la forme générale de cette surface. Les sections obtenues par les plans de coordonnées sont des ellipses que nous nommerons *ellipses principales*. Si, par un point I pris sur OX, nous menons un plan parallèle à YOZ,

en posant $OI = h$, nous obtenons une section qui se projette, en vraie grandeur, sur ce plan; son équation est

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

En imaginant que h varie de zéro à a, les axes de cette ellipse vont constamment en diminuant; ils conservent un rapport constant et varient, respectivement, depuis les va-

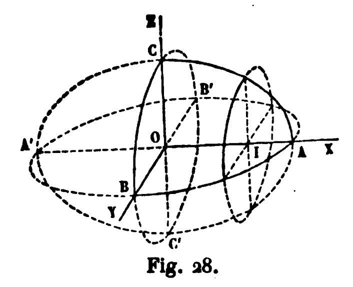


Fig. 28.

leurs b et c, jusqu'à zéro. Cette remarque permet de se faire une idée approximative de la forme affectée par l'ellipsoïde.

Nous ferons ici, avant d'aller plus loin, une convention; nous supposerons, une fois pour toutes,

$$a > b > c.$$

Ainsi, a représentera la longueur de l'*axe majeur;* b, celle de l'*axe moyen*: enfin c, celle de l'*axe mineur*.

256. S'il arrive que deux des quantités a, b, c soient égales, on peut alors faire deux hypothèses : ou bien $a = b$, c'est le cas de l'*ellipsoïde de révolution aplati;* ou bien $b = c$, la surface est alors un *ellipsoïde de révolution allongé.*

257. Théorème. *Toute section plane de l'ellipsoïde est une ellipse.*

Prenons l'équation du plan sécant sous la forme

$$\frac{z}{c} = \lambda \frac{x}{a} + \mu \frac{y}{b} + \nu,$$

λ, μ, ν, désignant des paramètres arbitraires. La section obtenue se projette sur le plan XOY suivant une courbe qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\left(\lambda\frac{x}{a}+\mu\frac{y}{b}+\nu\right)^2=1.$$

Si nous développons cette équation, nous voyons que le genre de la conique qui lui correspond dépend du signe de la quantité δ,

$$\delta=-\lambda^2\mu^2+(1+\lambda^2)(1+\mu^2)=1+\lambda^2+\mu^2;$$

δ étant positif, la projection est une ellipse; la courbe dans l'espace est donc, elle aussi, une ellipse.

258. Sections circulaires. Parmi les sections planes on doit remarquer celles qui sont des cercles.

D'après la théorie générale exposée précédemment (§ 203) les plans cycliques centraux sont donnés par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}(x^2+y^2+z^2)=0,$$

$\frac{1}{b^2}$ étant la racine moyenne de l'équation en S qui correspond à l'équation (E).

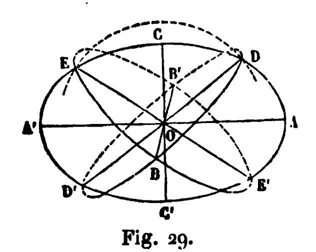


Fig. 29.

On conclut de là que l'équation des plans cycliques est :

$$\frac{x}{a}\sqrt{a^2-b^2}=\pm\frac{z}{c}\sqrt{b^2-c^2}+\theta,$$

θ désignant un paramètre arbitraire.

On remarquera que les plans cycliques centraux passent par l'axe moyen de la surface On les détermine géométriquement, comme l'indique la figure, en décrivant, du point O comme centre, avec b pour rayon, un arc de cercle dans le plan ZOX; la détermination des points communs à ce cercle et à l'ellipse n'exige pas que cette courbe soit tracée, et elle peut se faire avec la règle et le compas.

259. Ombilics. Les ombilics sont les extrémités des diamètres conjugués des plans cycliques ; ces droites sont situées dans le plan ZOX et correspondent aux équations

$$y=0, \quad \pm\frac{x}{a}\sqrt{b^2-c^2}=\frac{z}{c}\sqrt{a^2-b^2}.$$

On peut les déterminer géométriquement, avec la règle et le compas, en observant que la distance de l'ombilic au point O étant la longueur d'un diamètre conjugué de OE, dans l'ellipse AA'CC', en désignant par ρ la distance de l'ombilic au centre de l'ellipsoïde, on a

$$\rho^2=a^2+c^2-b^2.$$

260. Plan tangent. En désignant par $(x'\ y'\ z')$ les coordonnées du point de contact, l'équation générale du plan tangent (§ 85), appliquée à l'équation (E), donne

$$(T_1) \quad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1\ ;$$

c'est une première forme de l'équation du plan tangent. Nous allons en indiquer trois autres.

261. Cherchons d'abord à déterminer δ de façon que l'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta,$$

représente un plan tangent à (E). En identifiant cette équation avec (T_1), nous avons :

$$\frac{x'}{a^2}=\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{y'}{b^2}=\frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{z'}{c^2}=\frac{\gamma}{\delta};$$

ou,

$$\frac{x'}{a}=\frac{a\alpha}{\delta},\quad \frac{y'}{b}=\frac{b\beta}{\delta},\quad \frac{z'}{c}=\frac{c\gamma}{\delta}.$$

La relation

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1,$$

qui exprime que le point (x', y', z') appartient à l'ellipsoïde, donne donc

$$a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2=\delta^2.$$

Nous obtenons ainsi, pour l'équation du plan tangent, cette seconde forme :

$$(T_2)\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=\pm\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}$$

La quantité soumise au radical étant essentiellement positive, cette équation prouve que *l'on peut toujours mener à l'ellipsoïde deux plans tangents parallèles à un plan donné.*

262. On peut représenter les coordonnées d'un point mobile sur l'ellipsoïde au moyen de deux paramètres variables φ, φ', par les formules

$$\frac{x'}{a}=\cos\varphi\cos\varphi',\quad \frac{y'}{b}=\cos\varphi\sin\varphi',\quad \frac{z'}{c}=\sin\varphi.$$

L'équation du plan tangent s'écrit alors

$$(T_3)\quad \frac{x}{a}\cos\varphi\cos\varphi'+\frac{y}{b}\cos\varphi\sin\varphi'+\frac{z}{c}\sin\varphi=1.$$

263. Représentation d'un point de l'ellipsoïde. Un calcul que nous produirons plus loin (Lec. 26), conduit à l'identité suivante

$$(1-t^2-\theta^2)^2+4t^2+4\theta^2=(1+t^2+\theta^2)^2;$$

identité qui est, d'ailleurs, manifeste

D'après cette remarque, les coordonnées x', y', z', d'un point mobile sur l'ellipsoïde peuvent être représentées par les formules

$$(\varepsilon)\quad \frac{x'}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{y'}{b}=\frac{2t}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{z'}{c}=\frac{2\theta}{1+t^2+\theta^2}.$$

Parmi les conséquences de ces formules, on peut observer que l'égalité

$$(T_4)\quad \frac{x}{a}(1-t^2-\theta^2)+2t\frac{y}{b}+2\theta\frac{z}{c}=1+t^2+\theta^2.$$

représente, *sous une forme rationnelle*, et avec deux paramètres arbitraires t, θ, l'équation générale des plans tangents à l'ellipsoïde.

264. Plan polaire. Le pôle M_0 ayant pour coordonnées $(x_0, y_0, z_0,)$ l'équation du plan polaire est (§ 95).

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0.$$

Nous la représenterons aussi, dans la notation abrégée, par

$$\Pi=0.$$

265. Cône circonscrit. L'équation que nous avons trouvée (§ 98) et qui représente un cône de sommet donné circonscrit à une quadrique, étant appliqué à (E), donne

$$(C)\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)-1=\left(\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1\right)$$

ou, dans la notation abrégée, que nous avons adoptée,

$$(C')\quad EE_0=\Pi^2;$$

266. Théorème de Monge. *Le lieu des sommets des angles trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde est une sphère.*

Soit M_0 l'un de ces sommets; l'équation (C), développée, donne

$$(C'') \quad \frac{x^2}{a^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)+\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)+\frac{z^2}{c^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)$$
$$-2\frac{yzy_0z_0}{b^2c^2}-2\frac{zxz_0x_0}{a^2c^2}-2\frac{xyx_0y_0}{a^2b^2}+\ldots=0.$$

Le cône qui correspond à cette équation doit être capable d'un trièdre trirectangle circonscrit; or, nous avons vu (§ 248) que si l'équation

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+\ldots=0,$$

représentait un cône capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, on avait

$$AA'+AA''+A'A''-B^2-B'^2-B''^2=0.$$

Cette condition est *nécessaire et suffisante.*

Si nous l'appliquons à l'équation (C'') nous avons

$$\frac{1}{a^2b^2}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)-\frac{x_0^2y_0^2}{a^4b^4}$$
$$+\frac{1}{b^2c^2}\left(\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{z_0^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)-\frac{y_0^2z_0^2}{b^4c^4}$$
$$+\frac{1}{c^2a^2}\left(\frac{z_0^2}{c^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-1\right)-\frac{z_0^2x_0^2}{c^4a^4}=0.$$

La première ligne de ce développement peut s'écrire

$$\frac{1}{a^2b^2}\left[\left(\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)^2+\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)\left(\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)\right],$$

ou

$$\frac{1}{a^2b^2c^2}(z_0^2-c^2)\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right);$$

en appliquant cette remarque aux deux autres lignes nous pouvons écrire l'équation du lieu cherché sous la forme

$$\frac{E_0}{a^2b^2c^2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2-a^2-b^2-c^2)=0.$$

La présence du facteur E_0, dans ce résultat, peut s'expliquer comme il suit.

Si l'on suppose $E_0=0$, le point M_0 est situé sur l'ellipsoïde et l'équation du cône circonscrit est alors

$$\Pi^2=0.$$

On peut donc dire que, dans ce cas particulier, le cône circonscrit est constitué par *un plan double* qui est le plan tangent P, au point considéré M_0. Chaque face du trièdre trirectangle ayant son sommet au point M_0, coupe ce plan double suivant *deux droites coïncidentes ;* on peut donc considérer ce trièdre comme circonscrit à ce cône singulier. Or, nous avons cherché le lieu d'un point jouissant de la propriété que le cône circonscrit à l'ellipsoïde, cône ayant ce point pour sommet, fût capable d'un trièdre trirectangle circonscrit; les points de l'ellipsoïde répondent, *au point de vue analytique*, à cette question, et c'est pour ce motif que le calcul précédent nous a conduit à un résultat renfermant le facteur E_0.

Cette explication donnée, si nous supprimons ce facteur E_0, introduit comme nous venons de le dire, et si nous rendons x_0, y_0, z_0 coordonnées courantes, nous avons, pour l'équation du lieu

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2.$$

Cette équation représente une sphère que l'on a nommée *sphère de Monge,* ou encore *sphère orthoptique*. Il résulte de l'analyse précédente que tous les points de cette sphère jouissent de la propriété que nous avons exprimée plus haut; la condition qui a servi de base aux calculs précédents étant, comme nous l'avons rappelé, nécessaire et suffisante.

267. Cylindres circonscrits. Lorsqu'on suppose que le point M_0 s'éloigne à l'infini, dans la direction (α, β, γ), l'équation (C) devient

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)^2;$$

elle représente un cylindre circonscrit à la surface. Les génératrices sont parallèles à la droite qui correspond aux équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma},$$

et la courbe de contact est une ellipse ayant pour équations

$$E=0, \qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0.$$

EXERCICES

1. *Démontrer que le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à l'ellipsoïde* (E), *est un ellipsoïde correspondant à l'équation*

$$x^2(b^2+c^2)+y^2(c^2+a^2)+z^2(a^2+b^2)=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2.$$

2. *On considère la surface qui correspond à l'équation*

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}=1,$$

et un plan tangent quelconque P, *à cette surface. Le plan* P *coupe* YOX *suivant une droite* Δ, *et, par* Δ, *on peut mener un plan parallèle à* OZ; *les trois plans qu'on obtient ainsi se coupent en un point* I. *Démontrer que le lieu décrit par* I *a pour équation*

$$\frac{\alpha}{x^2}+\frac{\beta}{y^2}+\frac{\gamma}{z^2}=\frac{3}{2}.$$

3. *Démontrer que la surface podaire de l'ellipsoïde, lieu des projections du centre sur les plans tangents, a pour équation*

$$(1)\quad (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

Étudier la variation du rayon vecteur qui va de l'origine à un point de cette surface qui, comme toutes les podaires de quadriques, passe doublement par le cercle de l'infini et rentre, comme cas particulier, dans les surfaces **Cyclides.** (V. *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, par M. G. Darboux, Gauthier-Villars, 1873.)

Démontrer que la surface représentée par (1) *peut être considérée comme la surface inverse d'un ellipsoide convenablement choisi.*

4. *On imagine un ellipsoïde rapporté à ses axes et on considère ses ellipses principales : α désignant celle qui est placée dans le plan* YOZ, *et ainsi des autres.*

Soit Δ une droite s'appuyant sur β et sur γ, respectivement aux points R *et* S, *et soit* P *le pôle du plan* ARS, A *désignant l'un des sommets de l'ellipsoïde situés sur* OX.

Le plan A'RS *coupe les axes* OY *et* OZ *en deux points qui représentent les projections de* P *sur ces axes.*

Pour vérifier cette proposition par l'analyse on introduit les coordonnées (x', z'), (x'', y'') des points R et S. L'équation du plan ARS est alors

$$x+\frac{y}{y''}(a-x'')+\frac{z}{z'}(a-x')=a;$$

on calcule ensuite les coordonnées du point P et l'on vérifie ainsi la proposition.

On peut aussi remarquer que la propriété précédente est la conséquence géométrique, et immédiate, du théorème suivant qui donne une élégante construction de la tangente en un point de l'ellipse, avec la règle et l'équerre.

La tangente en un point M *pris sur une ellipse dont le grand axe est* AA', *et dont le centre est le point* O, *milieu de* AA', *rencontre la tangente en* A *en un point* C, *dont la distance à* A *est justement égale à celle du point* O *au point de rencontre de* A'M *avec le petit axe.*

5. *Démontrer que si t et θ désignent deux paramètres variables, les équations.*

$$\frac{x}{a}+t\frac{y}{b}+\theta\frac{z}{c}=1,$$

$$\frac{x}{a}-\frac{1}{t}\cdot\frac{y}{b}-\frac{1}{\theta}\cdot\frac{z}{c}=-1,$$

représentent une droite quelconque Δ rencontrant les deux ellipses principales β et γ.

6. *On considère un axe* AA′ *d'une ellipsoïde et un point* M *sur la surface; si l'on projette* A′M *sur les deux plans principaux qui passent par* AA′, *on obtient, dans les ellipses principales, deux cordes qui rencontrent ces courbes en des points* P *et* Q.

Les ellipses (A′PQ), (A′AM), *se coupent, en un point* Ω *et la droite* A′Ω *coupe en deux parties égales la projetante de* M *sur* AA′.

7. *On prend sur un ellipsoïde un point* M *et on le joint à l'un des sommets* A′ *de la surface; les projections de* A′M *sur les deux plans principaux qui passent par le sommet considéré* A′ *rencontrent les ellipses principales, respectivement, en des points* P *et* Q; *démontrer que le plan* MPQ *passe quel que soit le point* M *de l'ellipsoïde, par un point fixe; ce point étant le sommet* A, *opposé à* A′.

8. *Par le centre* O *d'un ellipsoïde on mène un plan* P *qui coupe la surface suivant une conique* Σ; *au point* O *on mène une perpendiculaire à* P *et l'on prend, sur cette droite, des longueurs* OI, OJ, *égales aux demi-axes de* Σ. *Trouver le lieu des points* I *et* J; *quelle est la nature de la section de la surface trouvée, par les plans de coordonnées.*

D'après la formule établie plus loin (§ 275) on a immédiatement l'équation du lieu :

$$\frac{a^2x^2}{a^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{b^2y^2}{b^2-x^2-y^2-z^2}+\frac{c^2z^2}{c^2-x^2-y^2-z^2}=0.$$

Cette surface du quatrième ordre est constituée par deux nappes, ayant deux points communs doubles; ceux qui correspondent aux plans cycliques centraux.

Elle a été découverte par Fresnel qui l'a nommée *surface de l'onde.* (V. *Mémoires de l'Institut*; V. VII, 1827, et Mannheim, *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences,* 1876, p. 130; 1877, pp. 167, 175.)

9. *Si trois points d'une droite demeurent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de la droite décrit un ellipsoïde.*

(Dupin.)

10. *Le volume de l'ellipsoïde considéré dans le théorème I est indépendant des angles du trièdre.*

11. *Si quatre points d'une droite demeurent sur les faces d'un tétraèdre un point quelconque de la droite décrit une ellipse et la droite reste parallèle aux génératrices d'un cône de révolution.*

(Mannheim.)

12. *Lorsque quatre points d'une droite demeurent sur quatre plans, tous les points de la droite décrivent des ellipses dont les centres sont en ligne droite.*

(Halphen.)

Pour ces quatre derniers exercices on peut consulter une solution donnée par M. Ed. Lucas. (*Journal de Math. spéc.*, août 1884.)

VINGT-DEUXIÈME LEÇON

L'ELLIPSOÏDE. (Les diamètres.)

268. Diamètres conjugués. Les formules démontrées précédemment (§ 177), étant appliquées à l'équation de l'ellipsoïde, prouvent que les droites qui correspondent aux équations

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}; \qquad \frac{x}{\alpha'}=\frac{y}{\beta'}=\frac{z}{\gamma'}; \qquad \frac{x}{\alpha''}=\frac{y}{\beta''}=\frac{z}{\gamma''},$$

forment un système triplement conjugué, par rapport à cette surface, si les égalités :

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0,$$

$$\frac{\alpha'\alpha''}{a^2}+\frac{\beta'\beta''}{b^2}+\frac{\gamma'\gamma''}{c^2}=0,$$

$$\frac{\alpha''\alpha}{a^2}+\frac{\beta''\beta}{b^2}+\frac{\gamma''\gamma}{c^2}=0,$$

sont vérifiées.

Si nous imaginons les extrémités de ces diamètres

$$M'(x', y', z'), \qquad M''(x'', y'', z''), \qquad M'''(x''', y''', z'''),$$

nous rappelons ici que nous avons établi (§ 183) les formules

$$(1)\left\{\begin{aligned} x'^2+x''^2+x'''^2&=a^2,\\ y'^2+y''^2+y'''^2&=b^2,\\ z'^2+z''^2+z'''^2&=c^2;\end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} x'y'+x''y''+x'''y'''&=0,\\ y'z'+y''z''+y'''z'''&=0,\\ z'x'+z''x''+z'''x'''&=0.\end{aligned}\right.$$

Nous nous proposons d'obtenir par ces formules, une nouvelle démonstration des théorèmes d'Apollonius (v. § 250).

269. Théorèmes d'Apollonius. (*Seconde démonstration.*) 1° Nous désignerons par a', b', c', les longueurs des demi-diamètres conjugués OM', OM'', OM'''. Nous avons donc

$$a'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2, \quad b'^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2, \quad c'^2 = x'''^2 + y'''^2 + z'''^2;$$

et si nous ajoutons les égalités (1) nous obtenons, d'abord,

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

égalité qui établit le théorème I.

2° Considérons maintenant le triangle OM'M''; la surface S''' de ce triangle se calcule par la formule établie plus haut (§ 72),

$$4S'''^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ y' & z' & 1 \\ y'' & z'' & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ z' & x' & 1 \\ z'' & x'' & 1 \end{vmatrix}^2.$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$4S'''^2 = (x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2.$$

En calculant de même les surfaces S' et S'', nous avons

$$4(S'^2 + S''^2 + S'''^2) = x'^2(y''^2 + y'''^2) + x''^2(y'^2 + y'''^2) + x'''^2(y'^2 + y''^2)$$
$$- 2x'y'x''y'' - 2x''y''x'''y''' - 2x'y'x'''y''' + \ldots$$

ou, en tenant compte des égalités (1),

$$4(S'^2 + S''^2 + S'''^2) = x'^2(b^2 - y'^2) + x''^2(b^2 - y''^2) + x'''^2(b^2 - y'''^2)$$
$$- 2x'y'x''y'' - 2x''y''x'''y''' - 2x'y'x'''y''' + \ldots$$

ou, encore,

$$4(S'^2 + S''^2 + S'''^2) = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - (x'y' + x''y'' + x'''y''')^2$$
$$- (y'z' + y''z'' + y'''z''')^2 - (z'x' + z''x'' + z'''x''')^2.$$

Les égalites (2) prouvent que l'on a, finalement,

$$4(S'^2 + S''^2 + S'''^2) = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2;$$

relation qui constitue le second théorème d'Apollonius.

3° Le volume V du tétraèdre formé par l'origine et par les trois points conjugués M', M'', M''', est donné par la formule (§ 73),

$$\pm 6V = \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant et en tenant compte des relations (1) et (2) on arrive, assez vite, au résultat annoncé

$$6V = abc.$$

Mais il est plus simple d'appliquer la règle que nous avons donnée en algèbre pour effectuer la multiplication de deux déterminants. On trouve ainsi, immédiatement,

$$36V^2 = \begin{vmatrix} x'^2 + x''^2 + x'''^2 & x'y' + x''y'' + x'''y''' & z'x' + z''x'' + z'''x''' \\ x'y' + x''y'' + x'''y''' & y'^2 + y''^2 + y'''^2 & z'y' + z''y'' + z'''y''' \\ x'z' + x''z'' + x'''z''' & y'z' + y''y'' + y'''z''' & z'^2 + z''^2 + z'''^2 \end{vmatrix},$$

ou, d'après les relations (1) et (2),

$$36V^2 = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons donc, finalement,

$$36V^2 = a^2b^2c^2,$$

ou

$$6V = abc.$$

C'est cette égalité qui donne le troisième théorème d'Apollonius.

270. Diamètres conjugués égaux. Nous allons montrer qu'il y a dans l'ellipsoïde une infinité de systèmes triplement conjugués et formés par des diamètres égaux.

Soit O le centre de la surface ; de ce point comme centre,

avec un rayon égal à $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$, décrivons une sphère ; nous obtenons sur l'ellipsoïde une certaine courbe Γ. Cette courbe est réelle parce que le rayon considéré est, à la fois, plus grand que c, et plus petit que a.

Prenons maintenant sur Γ un point M et soit P le plan

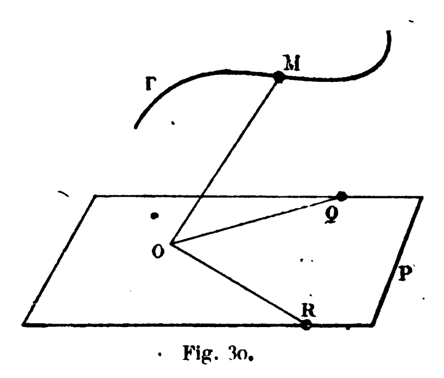


Fig. 30.

diamétral conjugué de OM. Ce plan P coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse; dans laquelle nous distinguerons les diamètres conjugués égaux OQ et OR. Les trois droites OM, OQ, OR, forment un système triplement conjugué ; il nous reste à montrer qu'elles sont égales.

Le premier théorème d'Apollonius donne

$$\overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

mais nous avons aussi

$$\overline{OM}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3}, \quad \text{et} \quad OQ = OR ;$$

ainsi,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} + 2\overline{OQ}^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Cette relation prouve que

$$\overline{OQ}^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3};$$

les trois droites OM, OQ, OR sont donc égales.

271. Plans diamétraux conjugués. Si nous considérons les deux équations

$$Ax + By + Cz = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z = 0,$$

les plans qu'elles représentent seront conjugués, si le diamètre Δ conjugué du premier plan est situé dans le second.

Les équations de Δ étant :

$$\frac{x}{Aa^2} = \frac{y}{Bb^2} = \frac{z}{Cc^2},$$

nous trouvons ainsi la relation cherchée

$$AA'a^2 + BB'b^2 + CC'c^2 = 0.$$

272. Plan et droite conjugués. Soit un plan P ayant pour équation

$$mx + ny + pz = 0,$$

et une droite Δ représentée par les égalités.

$$(1) \quad \begin{cases} Ax + By + Cz = 0, \\ A'x + B'y + C'z = 0. \end{cases}$$

La droite Δ' conjuguée du plan P a pour équations

$$\frac{x}{a^2m} = \frac{z}{b^2n} = \frac{z}{c^2p}.$$

D'autre part, les équations (1) pouvant s'écrire sous la forme

$$\frac{x}{BC' - CB'} = \frac{y}{CA' - AC'} = \frac{z}{AB' - BA'},$$

pour que P et Δ soient conjugués, on doit avoir :

$$\frac{a^2 m}{BC'-CB'}=\frac{b^2 n}{CA'-AC'}=\frac{c^2 p}{AB'-BA'}.$$

Ces conditions sont nécessaires ; elles sont aussi suffisantes.

273. Transformation homographique de l'Ellipsoïde. Les formules générales de la transformation homographique, dans l'espace, sont

$$(1)\quad x=\frac{U}{P},\qquad y=\frac{V}{P},\qquad z=\frac{W}{P},$$

U, V, W, P, désignant des formes linéaires des coordonnées X, Y, Z, du point qui correspond à celui dont les coordonnées sont désignées par x, y, z.

On vérifie facilement qu'en résolvant les formules précédentes par rapport à X, Y, Z, on a

$$(2)\quad X=\frac{u}{p},\qquad Y=\frac{v}{p},\qquad Z=\frac{w}{p},$$

u, v, w, p, étant des formes linéaires des lettres x, y, z.

Les formules (1) prouvent : 1° *qu'à un point m, correspond un seul point M ;* 2° *à un plan p, un plan P ;* 3° *enfin, à une droite* δ, *une droite* Δ.

Les formules (2) prouvent la réciprocité de ces propositions fondamentales.

Si l'on veut faire correspondre une sphère à l'ellipsoïde ; on pourra prendre les formules de transformation suivantes :

$$\frac{x}{a}=\frac{X}{\alpha}+\frac{Y}{\beta}+\frac{Z}{\gamma},$$
$$\frac{y}{b}=\frac{X}{\beta}+\frac{Y}{\gamma}+\frac{Z}{\alpha},\qquad (\alpha\beta\gamma\neq 0)$$
$$\frac{z}{c}=\frac{X}{\gamma}+\frac{Y}{\alpha}+\frac{Z}{\beta};$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Les formules :

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{R}, \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{R}, \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{R},$$

sont celles qui offrent l'exemple de la transformation homographique la plus simple.

L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad \textit{devient} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0;$$

ainsi *à l'ellipsoïde correspond une sphère.* On voit aussi (pour citer la propriété la plus saillante de cette transformation) qu'à deux diamètres δ, δ',

$$(\delta) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}, \qquad (\delta') \quad \frac{x}{\alpha'} = \frac{y}{\beta'} = \frac{z}{\gamma'},$$

correspondent deux diamètres Δ, Δ' de la sphère ; et ces droites ont pour équation, respectivement,

$$(\Delta) \quad \frac{aX}{\alpha} = \frac{bY}{\beta} = \frac{cZ}{\gamma}, \qquad (\Delta') \quad \frac{aX}{\alpha'} = \frac{bY}{\beta'} = \frac{cZ}{\gamma'},$$

Si les droites δ δ' sont deux diamètres conjugués de l'ellipsoïde, on a (§ 268)

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2} + \frac{\beta\beta'}{b^2} + \frac{\gamma\gamma'}{c^2} = 0.$$

Cette relation établit que les droites Δ, Δ', sont rectangulaires.

La propriété que nous avons voulu signaler peut donc se formuler dans les termes suivants : *A deux diamètres conjugués de l'ellipsoïde correspondent deux diamètres rectangulaires de la sphère correspondante.*

On voit, de même, qu'*à deux plans diamétraux conjugués, correspondent deux plans rectangulaires.*

274. Application. Parmi les conséquences de cette observation, nous ferons remarquer qu'à un système triplement conjugué de l'ellipsoïde, correspond un système triplement rectangulaire dans la sphère transformée.

Si l'on prend le cône c, ayant pour équation,

$$(c) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \ldots = 0$$

à cette surface correspond un autre cône C, dont l'équation est

$$(C) \quad Aa^2X^2 + A'b^2Y^2 + A''c^2Z^2 + \ldots = 0 .$$

Si (c) est capable d'un trièdre triplement conjugué inscrit, (C) est capable d'un triède trirectangle. On retrouve ainsi la condition déjà signalée,

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 = 0 ,$$

relation qui exprime que (c) représente un cône capable d'un trièdre triplement conjugué.

De même, si l'on veut exprimer que l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0 ,$$

représente un cône capable d'un trièdre triplement conjugué *circonscrit*, on pourra considérer le cône transformé qui a pour équation

$$Aa^2X^2 + A'b^2Y^2 + A''c^2Z^2 + 2BbcYZ + 2B'caZX + 2B''abXY = 0$$

et qui, lui, est capable d'un trièdre trirectangle, si l'on a (§ 248).

$$(AA' - B''^2)a^2b^2 + (A'A'' - B^2)b^2c^2 + (A''A - B'^2)c^2a^2 = 0.$$

Cette relation exprime donc qu'un cône donné est capable d'un trièdre triplement conjugué circonscrit.

275. Détermination des axes d'une section plane.

Le problème dont nous allons indiquer rapidement la solution peut s'énoncer ainsi :

On donne l'équation d'un plan P,

$$(P) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

et l'on propose de trouver :

1° *La direction* ; 2° *la grandeur des axes de la section* Σ, *faite dans l'ellipsoïde par le plan* (P).

Premier cas, $\delta = 0$. 1° Pour trouver la direction des axes, on désignera par x', y', z', les coordonnées d'un sommet M de Σ et l'on écrira que la droite Δ qui correspond aux équations

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'},$$

est perpendiculaire sur la droite Δ′, droite qui est tangente à Σ au point considéré et dont les équations sont :

$$(\Delta') \quad \begin{cases} \dfrac{xx'}{a^2} + \dfrac{yy'}{b^2} + \dfrac{zz'}{c^2} = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

On arrive ainsi à l'égalité

$$(A) \quad \alpha yz\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + \beta zx\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \gamma xy\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0.$$

2° Pour avoir la grandeur des axes, on coupe la quadrique par une sphère S, de rayon OM = R, et correspondant à l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

puis l'on considère le cône C, qui a pour sommet le centre de l'ellipsoïde Q, et pour directrice la courbe Γ, commune à S et à Q ; son équation est

$$x^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2}\right) + z^2\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{R^2}\right) = 0.$$

La tangente MT à Γ au point M (x', y', z') est perpendiculaire à OM, puisque Γ est une courbe sphérique, et elle appartient au plan tangent à Q, en ce point M ; la droite MT' tangente à la section Σ, en ce même point M est, elle aussi, perpendiculaire à OM, parce que M est un sommet de Σ. Si les deux droites MT, MT', ne se confondaient pas, TMT' serait le plan tangent à l'ellipsoïde, au point M ; mais le plan TMT' étant perpendiculaire à OM, ce fait géométrique ne peut avoir lieu que si M est un sommet de la surface.

Ce cas étant écarté, on voit enfin que le plan tangent au cône C n'est autre chose que le plan sécant proposé.

En identifiant les deux équations :

$$xx'\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)+yy'\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)+zz'\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)=0,$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

et, en remarquant que

$$\alpha x'+\beta y'+\gamma z'=0,$$

on a, finalement,

$$\text{(B)}\qquad \frac{a^2\alpha^2}{a^2-R^2}+\frac{b^2\beta^2}{b^2-R^2}+\frac{c^2\gamma^2}{c^2-R^2}=0.$$

Cette équation bicarrée, par rapport à R, a ses racines toujours réelles. La forme de l'équation (B) prouve ce fait en montrant que les racines sont séparées par la suite :

$$a^2, b^2, c^2.$$

Deuxième cas. $\delta = 0$. Lorsque le plan P ne passe pas par le centre O de la quadrique, on imagine un plan P', parallèle à P, et passant par O. Les plans P et P' coupent la quadrique suivant deux ellipses E, E' ; on remarquera d'abord que le centre O' de E' est à l'intersection de P avec le diamètre conjugué de ce plan et que les axes de E' sont deux droites menées par O', parallèlement aux axes de E.

On observe ensuite que les sections E, E′, sont des courbes homothétiques et que l'on a

$$\frac{\rho^2}{R^2}+\frac{h^2}{\alpha^2}=1.$$

ρ désignant l'un des axes de E′, h la longueur OO′ et α celle du demi-diamètre conjugué de P. Ainsi, on peut toujours déterminer, après avoir préalablement calculé $\frac{h}{\alpha}$, les axes d'une section centrale au moyen de l'équation (B).

276. Remarque. On peut aussi trouver l'équation (B), mais sous une forme moins commode, en s'appuyant sur les théorèmes d'Appollonius et sur l'invariance de la forme $A+A'+A''$.

EXERCICES

1. *Établir, sans avoir recours aux invariants, que si autour du centre* O *d'un ellipsoïde on fait tourner un trièdre trirectangle, on a*

$$\frac{1}{\overline{OA}^2}+\frac{1}{\overline{OB}^2}+\frac{1}{\overline{OC}^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

A, B, C *désignant les points de rencontre des trois arêtes de trièdre avec la surface.*

2. *Trouver l'aire d'une section plane.*

3. *On considère tous les plans* P *qui, passant par le centre* O *de l'ellipsoïde, coupent cette surface suivant des ellipses dont l'aire est constante et égale à celle d'un cercle de rayon* m; *trouver le lieu décrit par les normales menées, aux différents plans* P, *par le point* O.

En s'appuyant sur l'équation (B), on trouvera

$$m^4(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)=a^2b^2c^2(x^2+y^2+z^2).$$

VINGT-TROISIÈME LEÇON

L'ELLIPSOÏDE. (Les Normales.)

277. Équations de la normale. Soient x, y, z les coordonnées d'un point pris sur l'ellipsoïde ; les équations de la normale, en ce point, sont (§ 94)

$$\text{(N)} \qquad \frac{X-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{Y-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{Z-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Ces équations conduisent à quelques conséquences que nous allons développer.

278. Théorème. *Par un point* M_0, *pris dans l'espace, on peut, généralement, mener à l'ellipsoïde six normales ; deux de ces normales sont toujours réelles.*

Désignons par x_0, y_0, z_0, les coordonnées du point considéré M_0 ; la droite qui correspond aux équations (N) passant par ce point, nous avons

$$(1) \qquad \frac{x_0-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{y_0-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{z_0-z}{\frac{z}{c^2}} = -\lambda,$$

$-\lambda$ désignant la valeur commune de ces rapports ; λ est donc une inconnue auxiliaire que nous introduisons et nous allons chercher l'équation qui la détermine.

Les relations (1) donnent

$$\frac{x}{a} = \frac{ax_0}{a^2-\lambda}, \qquad \frac{y}{b} = \frac{by_0}{b^2-\lambda}, \qquad \frac{z}{c} = \frac{cz_0}{c^2-\lambda};$$

et, en exprimant que le point (x, y, z) est situé sur l'ellipsoïde, on a

$$\frac{a^2x_0^2}{(a^2-\lambda)^2}+\frac{b^2y_0^2}{(b^2-\lambda)^2}+\frac{c^2z_0^2}{(c^2-\lambda)^2}=1.$$

ou

$$(1)\quad (a^2-\lambda)^2(b^2-\lambda)^2(c^2-\lambda)^2-a^2x_0^2(b^2-\lambda)^2(c^2-\lambda)^2 \\ -b^2y_0^2(c^2-\lambda)^2(a^2-\lambda)^2-c^2z_0^2(a^2-\lambda)^2(b^2-\lambda)^2=0.$$

Cette équation est, en général, du sixième degré ; comme à toute valeur de λ correspond, d'après les équations (1), une normale; on voit que le nombre des normales issues d'un point est, en général, égal à six.

Nous allons montrer que, parmi ces normales, deux sont toujours réelles.

Si dans l'équation (2) nous substituons, successivement, à la place de λ, les valeurs : $-\infty$, a^2 et $+\infty$, nous obtenons les résultats suivants :

$$+\infty, \qquad -a^2x_0^2(b^2-a^2)^2(c^2-a^2)^2, \quad \text{et} \quad +\infty,$$

L'équation (1) a donc deux racines réelles au moins. Cette remarque établit complètement la propriété énoncée, parce qu'on sait que les racines réelles de l'équation (2) donnent, d'après (1), pour les inconnues x, y, z, des valeurs qui vérifient l'égalité

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et qui, par suite, sont acceptables ; x devant être compris entre $+a$ et $-a$, y entre $+b$ et $-b$; enfin, z entre $+c$ et $-c$.

279. Théorème de Chasles. *Les six normales que l'on peut mener d'un point à l'ellipsoïde appartiennent à un même cône du second ordre.*

Les équations (1) peuvent être transformées, comme nous allons le montrer. Prenons la première :

$$a^2y(x-x_0)-b^2x(y-y_0)=0.$$

Il est naturel, pour la démonstration du théorème qui nous occupe, de mettre en évidence les binômes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Écrivons donc l'équation précédente sous la forme :

$$a^2 (y - y_0)(x - x_0) + a^2 y_0 (x - x_0) - b^2 (x - x_0)(y - y_0) \\ - b^2 x_0 (y - y_0) = 0,$$

ou, sous celle-ci, qui est équivalente,

$$(C) \quad (a^2 - b^2)(y - y_0)(x - x_0) + a^2 y_0 (x - x_0) - b^2 x_0 (y - y_0) = 0.$$

Nous trouvons de même,

$$(A) \quad (b^2 - c^2)(z - z_0)(y - y_0) + b^2 z_0 (y - y_0) - c^2 y_0 (z - z_0) = 0,$$
$$(B) \quad (c^2 - a^2)(x - x_0)(z - z_0) + c^2 x_0 (z - z_0) - a^2 z_0 (x - x_0) = 0.$$

Si nous multiplions ces égalités (A), (B), (C), respectivement par x_0, y_0, z_0 ; puis, si nous ajoutons les résultats obtenus, nous avons

$$(\Gamma) \quad (a^2 - b^2) z_0 (x - x_0)(y - y_0) + (b^2 - c^2) x_0 (y - y_0)(z - z_0) \\ + (c^2 - a^2) y_0 (z - z_0)(x - x_0) = 0.$$

Le premier membre de cette équation étant une fonction entière des binômes $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, nous voyons donc que les six normales qui partent du point (x_0, y_0, z_0) sont situées sur un cône ; ce cône admet aussi, parmi ses génératrices, les droites qui correspondent aux équations :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = 0, \\ y - y_0 = 0; \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} y - y_0 = 0, \\ z - z_0 = 0; \end{array} \right. \quad (3) \left\{ \begin{array}{l} z - z_0 = 0, \\ x - x_0 = 0; \end{array} \right.$$

droites qui sont les cordes principales passant par le point considéré.

280. Théorème. *Les pieds des six normales issues d'un point à l'ellipsoïde, appartiennent à une cubique gauche.*

Reportons-nous aux équations (N) ; elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$U = xy(a^2 - b^2) - a^2 x_0 y + b^2 y_0 x = 0,$$
$$V = yz(b^2 - c^2) - b^2 y_0 z + c^2 x_0 y = 0,$$
$$W = zx(c^2 - a^2) - c^2 z_0 x + a^2 x_0 z = 0.$$

Multiplions-les, respectivement, par $c^2 z_0$, $a^2 x_0$, $b^2 y_0$; nous avons, par cette combinaison,

$$(\Delta) \quad c^2 z_0 (a^2 - b^2) xy + a^2 x_0 (b^2 - c^2) yz + b^2 y_0 (c^2 - a^2) zx = 0.$$

Les équations Γ Γ' représentent deux cônes du second ordre et il est remarquable que la droite qui joint le centre de l'ellipsoïde au point M_0, est une génératrice commune à l'un et à l'autre. L'intersection de ces cônes se compose donc 1° de la droite OM_0 ; 2° d'une courbe gauche ζ, du troisième ordre.

L'intersection de cette dernière avec la quadrique donne six points qui sont, précisément, les pieds des six normales issues du point considéré M_0, à l'ellipsoïde.

281. Propriétés de la cubique gauche ζ, aux pieds des normales.

1° Nous voulons faire remarquer d'abord que la courbe ζ, qui nous occupe, est **unicursale.**

Nous appelons *courbe gauche unicursale* celle qui jouit de la propriété que les coordonnées d'un point mobile sur elle peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles, entières ou fractionnaires, d'un paramètre variable t.

Par la droite OM_0 ; faisons passer un plan mobile P ; il coupe Γ suivant deux génératrices : l'une est OM_0, l'autre une droite Δ. De même, Γ' est coupé par P suivant deux génératrices, l'une d'elles est encore OM_0. l'autre est une droite Δ'. Ces droites Δ, Δ' se coupent en un point I, qui appartient à la cubique gauche. Les coordonnées de I sont donc *bien déterminées ;* elles n'admettent qu'une valeur et, par suite, s'expriment *rationnellement* au moyen du paramètre variable t, qui entre dans l'équation du plan P.

2° *Les directions asymptotiques de la cubique ζ, sont les directions principales de l'ellipsoïde*; car si l'on considère la position particulière du plan P, position obtenue en menant par OM_0 un plan parallèle à OX, les génératrices d'intersection sont alors : l'axe OX, pour Γ' ; et une parallèle à

OX, pour Γ. Ces deux droites donnent un point situé à l'infini, sur la cubique, dans la direction OX. Cette remarque s'applique aux axes OY et OZ.

3° Enfin on peut encore observer que *la cubique* ζ, *passe toujours par les points* O *et* M_0. Ceci se vérifie facilement par les équations (Γ) et (Γ'); on peut aussi reconnaître cette propriété, en se reportant à la génération, point par point, que nous avons indiquée pour la cubique ζ. Il suffit de considérer la position particulière du plan mobile P. qui correspond aux plans tangents, le long de OM_0, au cône Γ, et au cône Γ'.

282. Équation générale des quadriques passant par les pieds des Normales.

Cette équation est

$$(1)\quad E+\lambda U+\mu V+\nu W=0;$$

E désigne le premier membre de l'équation de l'ellipsoïde; U, V, W représentent, quand on les égale à zéro (§ 280), les cylindres projetant la cubique sur les plans principaux; enfin, λ, μ, ν sont trois paramètres arbitraires.

En effet, l'équation (1) est visiblement vérifiée par les coordonnées de l'un quelconque des pieds des normales; d'ailleurs, elle renferme trois paramètres variables et indépendants; la quadrique cherchée passant déjà par six points, on reconnaît ainsi que (1) est bien l'équation demandée.

283. Formules de Joachimsthal. Du point M_0 (x_0, y_0, z_0) partent, comme nous l'avons fait voir, six normales à l'ellipsoïde. Désignons par A, B, C; A', B', C'; les pieds de ces normales que nous séparons, arbitrairement, en deux groupes. Les trois points A, B, C, constituent un premier groupe, et nous désignerons par M (α, β, γ) le pôle du plan A B C; de même M' $(\alpha' \beta' \gamma')$ représentera le pôle du plan A' B' C' qui passe par les pieds des trois autres normales.

Les formules de Joachimsthal, analogues de celles que

nous avons établies dans la géométrie plane (§ 292), sont les suivantes :

$$\alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2, \qquad \gamma\gamma' = -c^2;$$

nous allons les démontrer [1].

Les plans A B C, A′ B′ C′, constituent, par leur ensemble, une quadrique particulière passant par les pieds des normales et dont l'équation est

$$(2) \quad \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\beta' z}{c^2} - 1\right) = 0.$$

L'équation (1), du paragraphe précédent, représentant toutes les quadriques passant par les pieds des normales, l'identité

$$(3) \quad E + \lambda U + \mu V + \nu W = K\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} + \frac{\gamma' z}{c^2} - 1\right)$$

doit être vérifiée pour des valeurs convenablement attribuées aux paramètres λ, μ, ν et K.

Cette remarque sert de base aux calculs qui suivent.

En égalant les constantes des deux membres de l'identité (3), on a, d'abord,

$$K = -1.$$

Les coefficients des termes en x^2, y^2, z^2, donnent alors

$$(J) \quad \alpha\alpha' = -a^2, \qquad \beta\beta' = -b^2, \qquad \gamma\gamma' = -c^2.$$

Ce sont les formules que nous avions annoncées.

1. Ces formules n'ont peut-être pas été données *explicitement* par Joachimsthal, mais elles résultent implicitement de certaines équations renfermées dans les mémoires si remarquables de ce géomètre. Voir notamment le mémoire cité à l'exercice 3.

284. Surface normo-polaire. En poursuivant, comme il est naturel de le faire, l'identification des deux membres de l'identité (3), nous allons aboutir à un résultat remarquable et montrer que les points M, ou M', appartiennent toujours à une surface du quatrième ordre, que M. Desboves[1] paraît avoir signalée le premier et qu'il a nommée *surface normo-polaire*.

En égalant les coefficients des termes en xy, yz et zx, on a, en tenant compte des formules (J),

$$-\lambda = \frac{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}}{\alpha\beta(a^2-b^2)}, \quad -\mu = \frac{\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}{\beta\gamma(b^2-c^2)}, \quad -\nu = \frac{\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}}{\gamma\alpha(c^2-a^2)},$$

et l'on peut écrire, sous la forme explicite, l'identité (3) de la manière suivante :

$$(3') \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-\frac{\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}}{\alpha\beta(a^2-b^2)}\left\{xy(a^2-b^2)-a^2x_0y+b^2y_0x\right\}$$
$$-\frac{\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}}{\beta\gamma(b^2-c^2)}\left\{yz(b^2-c^2)-b^2y_0z+c^2z_0y\right\}$$
$$-\frac{\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}}{\gamma\alpha(c^2-a^2)}\left\{zx(c^2-a^2)-c^2z_0x-a^2x_0z\right\}$$
$$=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}-1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2}+\frac{\beta' y}{b^2}+\frac{\gamma' z}{c^2}-1\right).$$

Écrivons maintenant que les coefficients des termes en x, y, z, sont égaux et nous obtenons trois relations nouvelles dans lesquelles entrent les coordonnées (x_0, y_0, z_0) du point M_0. Ces équations du premier degré sembleraient devoir bien déterminer ces paramètres, mais une étude plus attentive va nous montrer que ces équations sont indéterminées, ou in-

1 Desboves. *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques.* Mallet-Bachelier, 1861.

compatibles, suivant que M_0 est placé, ou non, sur une certaine surface que nous allons faire connaître.

Les équations qui déterminent x_0, y_0, et z_0 sont, d'après (3'), et en tenant compte des formules (J),

$$(4)\quad\left\{\begin{aligned}
1-\frac{\alpha^2}{a^2}&=\frac{z_0}{\gamma}\frac{c^2}{c^2-a^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)-\frac{y_0}{\beta}\frac{b^2}{a^2-b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right),\\
1-\frac{\beta^2}{b^2}&=\frac{x_0}{\alpha}\frac{a^2}{a^2-b^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)-\frac{z_0}{\gamma}\frac{c^2}{b^2-c^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),\\
1-\frac{\gamma^2}{c^2}&=\frac{y_0}{\beta}\frac{b^2}{b^2-c^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)-\frac{x_0}{\alpha}\frac{a^2}{c^2-a^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Multiplions ces égalités, respectivement, par

$$\frac{1}{b^2-c^2}\left(\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),\qquad \frac{1}{c^2-a^2}\left(\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right),\qquad \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right),$$

puis, ajoutons les résultats obtenus, et nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{b^2-c^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2}\right)\left(\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+\frac{1}{c^2-a^2}\left(1-\frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(\frac{\gamma^2}{c^2}+\frac{\alpha^2}{a^2}\right)&\\
+\frac{1}{a^2-b^2}\left(1-\frac{\gamma^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}\right)&=0.\end{aligned}$$

D'après ce résultat, si les coordonnées α, β, γ vérifient l'équation[1]

$$(\mathrm{D})\quad \Sigma\frac{1}{b^2-c^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=0.$$

les équations (4) sont compatibles, et il existe une infinité de pôles normaux correspondant au pôle tangentiel proposé; si, au contraire, le pôle tangentiel n'appartient pas à la surface normo-polaire, il n'y a pas de pôle normal correspondant.

1. Cette équation peut encore s'écrire:

$$(\mathrm{D}')\quad \Sigma(a^2-b^2)^2(a^2b^2z^2-c^2x^2y^2)=0,$$

forme sous laquelle M. Desboves l'a rencontrée.

EXERCICES

1. *On considère deux points* M′ M″ *sur l'ellipsoïde ; les normales en ces points coupent un plan principal, le plan* XOY *par exemple, en deux points* P′ P″. *On obtient ainsi, sur les plans principaux, trois segments* P′ P″, Q′ Q″, R′ R″ *; démontrer que les milieux de ces trois segments et le milieu de* M′ M″ *sont quatre points situés dans un même plan perpendiculaire à* M′ M″.

On résout, sans difficulté, cet exercice en introduisant les coordonnées x', y', z' ; x'', y'', z'', des deux points M′, M″. Celles du milieu de P′ P″ sont alors

$$(A) \quad \frac{x'+x''}{2}\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right), \qquad \frac{y'+y''}{2}\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right);$$

et, en tenant compte de la relation :

$$\frac{x'^2-x''^2}{a^2}+\frac{y'^2-y''^2}{b^2}+\frac{z'^2-z''^2}{c^2}=0,$$

on reconnaît que le plan élevé au milieu de M′ M″, perpendiculairement à cette droite, plan qui est représenté par l'équation

$$(x'-x'')\left(x-\frac{x'+x''}{2}\right)+(y'-y'')\left(y-\frac{y'+y''}{2}\right)$$
$$+(z'-z'')\left(z-\frac{z'+z''}{2}\right)=0,$$

passe par le point (A).

2. *On considère une normale à l'ellipsoïde, au point* M ; *soient* A, B, C *les points où elle rencontre les plans principaux ; démontrer que l'on a*

$$\frac{\text{MA}}{a^2}=\frac{\text{MB}}{b^2}=\frac{\text{MC}}{c^2}=\frac{1}{\text{OH}},$$

OH *désignant la distance du centre au plan tangent en* M.

3. *Soient h_1, h_2, h_3 trois points de la surface*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

points pour lesquels les normales concourent au même point h; en désignant par p, q, r, les coordonnées du pôle du plan h_1, h_2, h_3, *il existe trois autres points* h_4, h_5, h_6, *de la surface, pour lesquels les normales concourent en h, et ces points sont situés dans le plan :*

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1.$$

(Joachimsthal.)

Ce théorème élégant résulte immédiatement des formules de Joachimsthal, en considérant les pôles tangentiels des deux plans $h_1\, h_2\, h_3$, $h_4\, h_5\, h_6$; il a été démontré par l'auteur par une méthode relativement longue. (V. *Journal de Crelle*, t. LIII, p. 149 à 172.)

4. *Le centre de la sphère qui contient les pieds de quatre des normales que l'on peut abaisser, d'un point donné* M, *sur une surface du second ordre* Q, *est le milieu du segment qui joint le point* M *au centre du plan qui contient les deux autres normales.*

(Laguerre.)

M. Laguerre a proposé d'appeler *centre* d'un plan représenté par l'équation

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}+1=0,$$

le point dont les coordonnées sont p, q, r. (V. *Nouvelles Annales*, 1878, p. 167).

5. *D'un point* M *on abaisse des normales sur l'ellipsoïde ;* $MA_1, MA_2, \ldots MA_6$ *; et l'on considère la cubique gauche* Γ *aux pieds des normales, courbe qui passe par le centre* O ; *par* O *on mène un plan parallèle à* MA_1, A_2, *plan qui coupe* Γ *en deux autres points* B, C ; *ces deux points et les quatre pieds* A_3, A_4, A_5, A_6, *appartiennent à une même sphère.*

(Laguerre.)

VINGT-QUATRIÈME LEÇON

LES FOCALES [1]

285. Définitions. Parmi les propriétés des quadriques qui offrent quelque analogie avec celles que nous avons rencontrées dans l'étude des coniques, nous voulons citer celles qui sont relatives aux *foyers*. Mais nous ferons observer, à ce propos, que les propriétés des courbes planes ne se transportent pas, aux surfaces du même ordre, sans subir, presque toujours, quelques transformations ; tout en conservant une certaine analogie qui explique la transition entre l'idée qu'on a développée dans la géométrie plane et celle qu'on se propose d'étudier dans l'espace.

1. Les courbes que nous appelons, dans cette leçon, **coniques focales**, ont été particulièrement étudiées par Chasles qui les a nommées **coniques excentriques.** (*Mémoires de l'Académie de Bruxelles*, 1829 ; *Aperçu historique*, p. 384.)

Le mot de *coniques focales* a prévalu dans l'enseignement et dans les livres ou mémoires qui traitent de ces courbes. Chasles dit lui-même (*loc. cit.*) que cette expression lui paraît préférable. Il ne l'a rejetée que pour un motif vraiment insuffisant, Quetelet ayant employé le mot *focale* pour désigner la cubique qu'il avait rencontrée dans la recherche d'un certain lieu géométrique. (V. ex. 1, de cette leçon.)

Mais l'expression de Quetelet doit être rejetée ; non seulement parce que toute ligne, lieu des foyers de certaines sections planes d'un quadrique, pourrait être appelée focale, au même titre que la cubique en question, mais aussi parce que cette courbe (que Chasles, pour tourner la difficulté, proposait d'appeler le *focoïque*) a un nom et des propriétés qui la caractérisent nettement. C'est la *strophoïde oblique* courbe qui, comme nous l'avons vu, (*Géom. plane*, § 399), est définie par les propriétés suivantes : 3° elle est du troisième ordre ; 2° elle passe par les ombilics du plan : 3° elle possède un nœud à tangentes rectangulaires.

On a donné pour les foyers des quadriques, des définitions diverses [1] ; Nous adopterons la suivante.

Un point F *est dit* **foyer** *d'une quadrique* Σ, *lorsqu'il existe deux plans* P, P′, *associés à ce point, et qui jouissent de la propriété que si l'on prend sur* Σ *un point quelconque* M, *le carré de la distance* MF, *est au produit des distances de* M *aux deux plans* P, P′, *dans une raison constante.*

La droite commune aux deux plans P, P′, associés au foyer F, se nomme la **directrice** correspondante à F.

L'existence de ces points et de ces droites ne résultant pas, d'une façon évidente, de la définition précédente, nous devons montrer d'abord que l'on peut trouver dans les quadriques de pareils points et de semblables droites.

Nous supposons que Σ est une quadrique à centre; mais, pour n'avoir pas à distinguer les genres différents, nous

1. Sur cette importante question on peut consulter les livres et les mémoires suivants :

MAGNUS. *Annales de Gergonne*, tome XVI, p. 33, 1825-1826.

MAC CULLAGH. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol. II, p. 446 ; 1836.

TOWNSEND. *Cambridge and Dublin mathematical journal*, vol. III, pp. 1, 97, 148 ; 1842.

CHASLES. *Mém. de l'Académie de Bruxelles*, 1829. — *Comptes rendus*, 1835. — *Aperçu historique*, 1837 ; note XXXI, p. 384.

AMIOT. *Journal de Liouville*, tomes VIII et X ; 1843 et 1845.

SALMON. *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions ;* 1862.

BRIOT et BOUQUET. *Complément de la Géométrie analytique*, p. 261.

PAINVIN. *Principes de la Géométrie analytique à trois dimensions.* Géométrie de l'espace, 2e partie, p. 314 ; 1870.

Nous ajouterons à ces renseignements que c'est à PLUCKER que l'on doit une définition des foyers, s'étendant à toutes les courbes et à toutes les surfaces. Cette définition très féconde, malheureusement plus analytique que géométrique, et que nous avons craint d'adopter dans ce traité élémentaire est la suivante :

Un point F *est foyer d'une courbe* Γ *quand le cercle de rayon nul ayant son centre en* F *est bitangent à* Γ

Cette définition s'étend à l'espace avec une analogie complète ;

Un point F *est foyer d'une surface* Σ, *quand la sphère de rayon nul, ayant son centre en* F, *est bitangente à* Σ.

Les *focales* des surfaces, quel que soit l'ordre de celles-ci, sont les courbes constituées par l'ensemble, ou lieu, des foyers.

représenterons l'équation de la surface par la notation suivante :

$$(1) \quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-t^2=0.$$

286. Théorème. *Il existe dans les quadriques à centre une infinité de foyers ; ces points sont situés dans les plans principaux, sur des coniques réelles ou imaginaires, dites coniques focales.*

Désignons par x, y, z, les coordonnées d'un point M, pris arbitrairement sur la quadrique Σ ; et soient α, β, γ, celles d'un foyer F de cette surface. Les plans associés étant représentés par les équations :

$$P=0, P'=0,$$

Nous avons, d'après la définition du point F,

$$(2) \quad (x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2-KPP'=0. \ (t=1).$$

Dans cette égalité K désigne, bien entendu, une constante. La relation (2) étant vérifiée par les coordonnées d'un point quelconque de Σ, les premiers membres des égalités (1) et (2) sont identiques, à un facteur constant près.

Écrivons donc,

$$(x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2-KPP'=\lambda\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-t^2\right),$$

ou

$$(3) \quad (x-\alpha t)^2+(y-\beta t)^2+(z-\gamma t)^2-\lambda\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-t^2\right)=KPP'.$$

Le second membre de cette identité étant, abstraction faite de la constante K, un produit de deux formes linéaires en x, y, z, t, nous pouvons remarquer qu'il est identique à une différence de deux carrés ; par suite, la forme quadratique qui constitue le premier membre admet un discriminant h, dont tous les mineurs du troisième ordre sont nuls.

Nous avons, d'ailleurs,

$$h = \begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{A} & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1-\frac{\lambda}{B} & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1-\frac{\lambda}{C} & -\gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\lambda \end{vmatrix}.$$

Le mineur :

$$\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda}{A} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{\lambda}{B} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\lambda}{C} \end{vmatrix} = \left(1-\frac{\lambda}{A}\right)\left(1-\frac{\lambda}{B}\right)\left(1-\frac{\lambda}{C}\right),$$

étant nul, on doit supposer, successivement, que les facteurs $1-\frac{\lambda}{A}$, $1-\frac{\lambda}{B}$, $1-\frac{\lambda}{C}$ sont nuls.

En premier lieu, prenons le cas où l'on a $\lambda = C$, et par conséquent,

$$h = \begin{vmatrix} 1-\frac{C}{A} & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1-\frac{C}{B} & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma \\ -\alpha & -\beta & -\gamma & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+C \end{vmatrix}$$

Parmi les mineurs de ce déterminant, distinguons d'abord celui qu'on obtient en supprimant la troisième colonne et la quatrième ligne ; en l'égalant à zéro, nous avons

$$\gamma\left(1-\frac{C}{A}\right)\left(1-\frac{C}{B}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$\gamma = 0,$$

Si, comme nous le supposerons formellement, la quadrique considérée n'est pas de révolution.

Le déterminant h peut s'écrire alors :

$$h = \begin{vmatrix} 1 - \frac{C}{A} & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 - \frac{C}{B} & 0 & -\beta \\ C & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha & -\alpha & 0 & \alpha^2 + \beta^2 + C \end{vmatrix}$$

Tous les mineurs du troisième ordre de h seront nuls si nous écrivons que

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{C}{A} & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 - \frac{C}{B} & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \alpha^2 + \beta^2 + C \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant développé donne

$$\left(1 - \frac{C}{A}\right)\left\{\left(1 - \frac{C}{B}\right)(\alpha^2 + \beta^2 + C) - \beta^2\right\} - \alpha^2\left(1 - \frac{C}{B}\right) = 0,$$

ou, après simplification,

$$\frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} = 1.$$

Réciproquement, si les coordonnés α, β, γ, d'un point F, vérifient les relations :

$$\gamma = 0, \quad \frac{\alpha^2}{A - C} + \frac{\beta^2}{B - C} = 1,$$

tous les mineurs du troisième ordre de h sont nuls et l'identité (3) a lieu. Le point F, considéré, jouit donc de la propriété qui définit un foyer.

En prenant, successivement, les hypothèses:

$$\lambda = A, \qquad \lambda = B, \qquad \lambda = C,$$

on trouve qu'il y a, dans les quadriques à centre, une infinité de foyers qui sont situés sur trois coniques, situés dans les plans principaux, et correspondant aux équations :

$$(Z) \quad z = 0, \qquad \frac{x^2}{A - C} + \frac{y^2}{B - C} = 1;$$

$$(X) \quad x = 0, \qquad \frac{y^2}{B - A} + \frac{z^2}{C - A} = 1;$$

$$(Y) \quad y = 0; \qquad \frac{z^2}{C - B} + \frac{x^2}{A - B} = 1;$$

Dans le cas de l'ellipsoïde ($a^2 > b^2 > c^2$), (Z) représente une ellipse réelle ; (X) une ellipse imaginaire ; enfin, (Y) une hyperbole.

287. On remarquera que chacune des coniques focales a pour foyers ceux de la section principale correspondante et pour sommets les foyers des autres sections principales.

On peut aussi vérifier que *les coniques focales passent par les ombilics* ; en particulier, dans le cas de l'ellipsoïde, la focale (Y) passe par les ombilics réels de la surface.

288. Détermination de la Directrice. Théorème. *Si l'on prend sur la focale* (Z) *un point* F, *la directrice correspondante* Δ *s'obtient par la construction suivante : ayant mené à* (Z) *une tangente* PQ, *au point* F, *la directrice passe par le pôle* φ *de* PQ, *par rapport à la section principale* AB *du plan* YOX ; *de plus, elle est parallèle à* OZ.

Prenons maintenant, pour plus de précision, la notation de l'ellipsoïde et faisons dans l'identité (3), (§ 286) $\gamma_1 = 0$ et $\lambda = c$; nous obtiendrons ainsi les facteurs P, P' ; et, par suite, les équations de la directrice.

Posons donc, d'après cette remarque,

$$U = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2 - \frac{c^2}{b^2}y^2 + c^2,$$

ou

$$U = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) - 2\alpha x + \frac{y^2}{b^2}(b^2 - c^2) - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 + c^2.$$

En complétant les carrés des expressions :

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2 - c^2) - 2\alpha x, \quad \frac{y^2}{b^2}(b^2 - c^2) - 2\beta y,$$

et en tenant compte de la relation :

$$\frac{\alpha^2}{a^2 - c^2} + \frac{\beta^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

on vérifie que U est une somme de deux carrés. Mais pour obtenir la directrice, c'est-à-dire la droite intersection des plans qui correspondent à l'équation $U = 0$, il suffit de prendre les dérivées partielles de U, par rapport à x et à y; l'arête des deux plans étant considérée comme une ligne de centres.

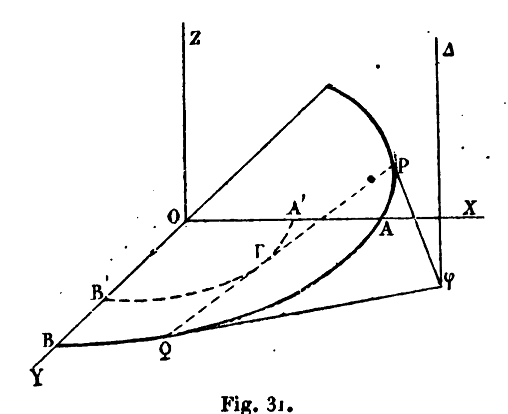


Fig. 31.

Ainsi, les équations de la directrice sont :

$$(\Delta) \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{a^2}{a^2 - c^2}, \quad \frac{y}{\beta} = \frac{b^2}{b^2 - c^2}.$$

La droite PQ, tangente à la focale, au point F, a pour équation

$$\frac{\alpha x}{a^2 - c^2} + \frac{\beta y}{b^2 - c^2} = 1,$$

et, si nous cherchons les coordonnées du pôle φ de cette droite, par rapport à l'ellipse principale du plan YOX, nous trouvons, justement, les formules (Δ). Ainsi, la directrice correspondante au point F est déterminée, comme nous l'avons dit.

289. Théorème. *Les plans associés d'un foyer* F *sont les plans cycliques qui passent par la directrice correspondante* Δ.

Cette propriété résulte immédiatement de l'identité (3), (§ 286).

Nous ferons aussi remarquer, à propos de cette identité, que si l'on considère le *point-sphère* qui correspond à l'équation

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = 0,$$

l'intersection de cette sphère évanouissante, ayant pour centre le point F, avec la quadrique proposée, est constituée par un système de deux plans. On peut donc dire que : *le foyer est un point-sphère qui a un double contact avec la quadrique, la droite qui joint les points de contact étant la directrice.* Cette propriété, qui est l'analogue d'une propriété du foyer dans les coniques, a été prise par *Plücker* pour définir les foyers dans les quadriques (V. la note p. 300).

290. Foyers de première et de seconde espèce. Dans l'identité (3), lorsqu'on prend pour λ l'une des valeurs A, B, ou C, si le point (α, β, γ,) appartient à une des coniques focales, le premier membre est une *somme* ou une *différence* de deux carrés.

Dans le premier cas, les plans associés au foyer considéré sont imaginaires; ils sont réels, quand on envisage la seconde hypothèse.

On a quelquefois distingué ces deux cas et appelé *foyers de première espèce* ceux qui correspondent à des plans associés réels ; les autres sont dits *foyers de seconde espèce.*

291. Théorème. *Les focales représentent le lieu géométrique des sommets des cônes de révolution circonscrits en la quadrique correspondante.*

Ce théorème se reconnaît immédiatement par des considérations géométriques en imaginant une sphère inscrite dans le cône, et en supposant que le centre de cette sphère se déplace et vient coïncider avec le sommet du cône. On peut alors considérer ce point comme représentant une sphère évanouissante, doublement tangente à la quadrique. Mais on peut aussi établir la propriété en question par l'analyse, comme nous allons l'indiquer.

L'équation d'un des cônes considérés est

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}-1\right)=\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}-1\right)^2.$$

Si nous supposons, d'abord, $x'y'z' \neq 0$, les conditions connues :

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}$$

appliquées à l'équation précédente donnent :

$$(1) \quad \frac{1}{a^2}E'=\frac{1}{b^2}E'=\frac{1}{c^2}E'.$$

Si les nombres a, b, c ne sont pas tous égaux, il n'y a pas, *dans l'hypothèse que nous avons faite*, d'autre solution à ces équations que $E'=0$, solution singulière, évidente *a priori*, mais sans intérêt.

Si, au contraire, on suppose $a=b=c$, les égalités (1) sont des identités; tous les points de l'espace répondent à la question; ce résultat est encore évident.

Revenons, maintenant, sur l'hypothèse que nous avons faite et supposons que le produit $x'y'z'$ soit nul.

En admettant que l'on ait $z' = 0$, deux des rectangles disparaissent, à savoir les termes en yz et xz; et en appliquant la condition connue :

$$B''^2 = (A - A'')(A' - A''),$$

nous trouvons

$$\frac{x'^2y'^2}{a^4b^4} = \left\{ \frac{1}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \right\} \left\{ \frac{1}{b^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} - 1\right) - \frac{1}{c^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \right\}$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{1}{a^2b^2}\left\{ \frac{x'^2y'^2}{a^2b^2} - \left(\frac{x'^2}{a^2} - 1\right)\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \right\} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right)$$
$$\left\{ \frac{1}{c^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1\right) - \frac{1}{b^2}\left(\frac{x'^2}{a^2} - 1\right) - \frac{1}{a^2}\left(\frac{y'^2}{b^2} - 1\right) \right\}.$$

Nous apercevons alors le facteur commun

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - 1,$$

et ce résultat pouvait être prévu, *a priori*, puisque tous les points de la surface, à titre singulier, font partie du lieu.

Toute réduction opérée, nous trouvons

$$\frac{x'^2}{a^2 - c^2} + \frac{y'^2}{b^2 - c^2} = 1,$$

et nous pouvons enfin conclure que le lieu cherché est bien la focale située dans le plan YOX.

En supposant, successivement : $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$; on trouve, pour le lieu complet, les trois coniques focales.

292. Surfaces homofocales. (*Définition, équation générale.*) On dit que deux quadriques Q, Q', sont homofocales lorsqu'elles admettent les mêmes focales. Deux surfaces homofocales ont donc, d'après cela, les mêmes plans principaux.

Si l'on considère l'équation

$$(1)\quad E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

une surface, homofocale à l'ellipsoïde qu'elle représente, pourra être représentée par l'égalité

$$(2) \quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1.$$

Pour que les équations (1) et (2) représentent des quadriques ayant les mêmes focales, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$A-C=a^2-c^2, \quad \text{et} \quad B-C=b^2-c^2,$$

ou

$$A-a^2=B-b^2=C-c^2=\lambda,$$

λ désignant la valeur commune des binômes $A-a^2$, $B-b^2$, $C-c^2$.

Ainsi, l'équation générale des surfaces homofocales à la quadrique $(E=0)$, est

$$(H) \quad \frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

λ représentant un paramètre variable.

293. Théorème. *Par un point de l'espace passent trois surfaces réelles, homofocales à un ellipsoïde donné.*

Prenons un point M' dans l'espace; soient x', y', z', ses coordonnées. L'équation (H) que nous venons d'établir prouve que nous avons, pour déterminer λ, l'égalité

$$(1) \quad \frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda}=1.$$

Cette équation, rendue à la forme entière, est du troisième degré ; et le terme tout connu est différent de zéro si, comme nous le supposons, M' n'est pas pris sur l'ellipsoïde proposé. De plus, la forme bien connue de l'équation (1) prouve que celle-ci a trois racines réelles, séparées par la suite :

$$-\infty, -a^2, -b^2, -c^2, \quad +\infty,$$

294. Théorème. *Les surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, homofocales à une quadrique Σ, sont, deux à deux, orthogonales.*

Nous venons de vérifier que par un point M′ passaient trois surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3 homofocales à un ellipsoïde donné.

Soient

$$(\Sigma_1) \quad \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

$$(\Sigma_2) \quad \frac{x^2}{A'}+\frac{y^2}{B'}+\frac{z^2}{C'}=1,$$

les équations des deux surfaces Σ_1, Σ_2. Ces quadriques étant homofocales, nous avons

$$(1) \quad A-A'=B-B'=C-C'.$$

Cela posé, représentons par x', y', z', les coordonnées d'un point M′ commun à Σ_1 et à Σ_2; les plans tangents P, P′, à ces surfaces, en ce point M′, ont pour équation, respectivement,

$$\frac{xx'}{A}+\frac{yy'}{B}+\frac{zz'}{C}=1, \qquad \frac{xx'}{A'}+\frac{yy'}{B'}+\frac{zz'}{C'}=1.$$

Le théorème que nous avons énoncé sera démontré si l'on peut vérifier que l'on a

$$(2) \quad \frac{x'^2}{AA'}+\frac{y'^2}{BB'}+\frac{z'^2}{CC'}=0.$$

Or, les deux égalités :

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}+\frac{z'^2}{C}=1, \qquad \frac{x'^2}{A'}+\frac{y'^2}{B'}+\frac{z'^2}{C'}=1,$$

donnent, par combinaison,

$$\frac{x'^2(A-A')}{AA'}+\frac{y'^2(B-B')}{BB'}+\frac{z'^2(C-C')}{CC'}=0$$

ou, en tenant compte des relations (1),

$$\frac{x'^2}{AA'}+\frac{y'^2}{BB'}+\frac{z'^2}{CC'}=0.$$

Les plans P, P', sont donc perpendiculaires ; et nous pouvons conclure de cette remarque que les trois surfaces Σ_1, Σ_2, Σ_3, qui correspondent à une valeur donnée à λ dans l'équation (H) forment un système triplement orthogonal, quand on fait varier le paramètre λ.

EXERCICES

1. Théorème. *Le lieu des sections faites dans un cône Σ, par des plans passant par une droite Δ, tangente à ce cône, et perpendiculaire à une arête* SO, *est une strophoïde oblique.*

(Quetelet.)

Fig. 32.

Prenons les axes qu'indique la figure, soit OA la trace du plan sécant mobile sur le plan YOX ; posons

$$SO = d \quad SOX = \alpha, \quad OF = \rho, \quad FOX = \omega.$$

Nous avons :

$$\frac{SA}{\sin(\alpha - \omega)} = \frac{d}{\sin(\alpha + \omega)} = \frac{OA}{\sin 2\alpha} = \frac{OA - SA}{\sin 2\alpha - \sin(\alpha - \omega)}$$

D'autre part,

$$AF = AB, \text{ et } OA - \rho = SA - SB = SA - SC = SA - (d - \rho).$$

On a donc

$$2\rho = d + OA - SA = d + \frac{d \sin 2\alpha - d \sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha + \omega)}$$

et, finalement,

$$\rho = d \frac{\cos \alpha (\sin \alpha + \sin \omega)}{\sin(\alpha + \omega)}$$

En cherchant l'équation cartésienne de cette courbe, on trouve, après avoir supprimé le facteur $x \sin \alpha + y \cos \alpha$, l'équation connue de la strophoïde oblique.

On reconnaît d'ailleurs, immédiatement, le théorème de Quetelet en observant que

$$FF' = SO - SA = O'A.$$

En menant par H une droite HK parallèle à SO', cette droite passe par le milieu de OA et, par suite, par le milieu de EF. Ainsi on peut écrire

$$IF = IF' = \frac{O'A}{2} = IH$$

Le lieu décrit par le point F, ou par le point F', est donc une strophoïde oblique déterminée par le point O et la droite KH.

2. *Quand un cône est circonscrit à une surface du second degré* Q, *ses trois axes vont rencontrer chacun des plans principaux de* Q *en des points* A, B, C, *tels que* BC *est la polaire de* A *par rapport à la conique focale située dans le plan principal considéré.*

(Chasles.)

3. *Le produit des distances de chaque point d'une conique focale d'une surface du second degré, à deux plans tangents à la surface, parallèles entre eux et parallèles à la tangente à la conique au point pris sur elle, est constant, quel que soit ce point.*

(Chasles.)

4. *Les axes d'un cône circonscrit à une quadrique sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par le sommet du cône considéré.*

VINGT-CINQUIÈME LEÇON

LES HYPERBOLOÏDES. (Cône asymptote et sections planes.)

Lorsque les trois racines de l'équation en S sont différentes de zéro, si elles n'ont pas le même signe, l'équation réduite de la surface prend l'une ou l'autre des formes suivantes:

$$(H_1)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(H_2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Nous avons déjà distingué les figures différentes affectées par les surfaces qui correspondent à ces équations et nous avons nommé *hyperboloïde à une nappe*, la première; *hyperboloïde à deux nappes,* la seconde.

En faisant varier z de $+\infty$ à $-\infty$, dans les équations (H_1) et (H_2), on aperçoit les résultats suivants:

1° Dans H_1, les sections parallèles à YOX sont des ellipses, toujours réelles, dont les axes croissent au delà de toute limite. La surface est constituée par une nappe indéfinie qui s'élargit de plus en plus quand on s'éloigne du plan YOX; cette nappe repose sur ce plan par une ellipse correspondant à l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

Cette section porte le nom d'*ellipse de gorge.*

Comme nous l'avons déjà observé (§ 146), et nous reviendrons sur ce point dans la leçon suivante, cette surface admet des génératrices rectilignes ; pour ce motif, on la désigne quelquefois par l'expression **Hyperboloïde réglé**.

2° Dans H_2, les sections sont imaginaires pour les plans qui correspondent à l'équation $z = h$, si l'on a $h^2 < c^2$; lorsque h^2 est supérieur à c^2, les ellipses de section sont réelles et leurs axes, partant de la valeur zéro, croissent au delà de toute limite en même temps que h.

En résumé, les deux surfaces ont la forme, déjà signalée, et que rappellent les figures ci-dessous.

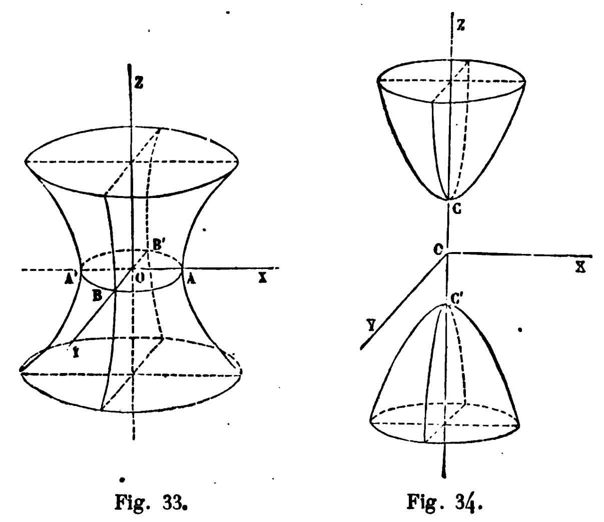


Fig. 33. Fig. 34.

Sans nous arrêter à étudier les propriétés de ces surfaces, qui offrent une analogie trop intime avec celles que nous avons signalées pour l'ellipsoïde, nous indiquerons seulement celles qui sont relatives au cône asymptote et aux génératrices rectilignes.

295. Cône asymptote. L'équation du cône asymptote aux surfaces H_1 et H_2, est d'après un résultat précédemment établi (§ 148),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les deux hyperboloïdes que nous venons de considérer et qui correspondent (en prenant, successivement, le signe +, et le signe —) à l'équation

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = \pm 1 \qquad (AA'A'' < 0)$$

sont appelés *hyperboloïdes conjugués*. Ils occupent, relativement au cône asymptote commun, la position respective indiquée par la figure (35), et les sections faites par un même plan dans ces deux hyperboloïdes conjugués sont des courbes homothétiques. Cette propriété, facile à vérifier directement, peut être considérée comme résultant de ce fait, démontré précédemment (§ 24), et en vertu duquel les sections faites dans un hyperboloïde et dans son cône asymptote, sont homothétiques et concentriques.

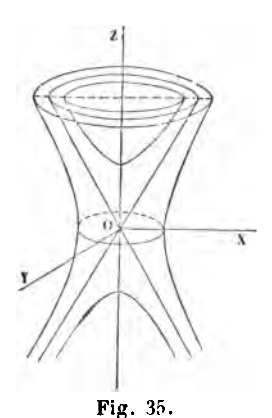


Fig. 35.

Cette propriété est, comme on le voit, l'analogue de celle que nous avons signalée dans la géométrie plane, propriété relative aux hyperboles conjugués et à leurs asymptotes communes (§ 352 ; ex. 4, p. 474).

296. Sections planes. Une autre conséquence qui mérite d'être signalée est relative aux sections planes des hyperboloïdes qui peuvent être, suivant la direction donnée au plan sécant, des ellipses, des hyperboles et des paraboles ; ou encore, bien entendu, des variétés de ces courbes.

En effet, l'équation du cône asymptote étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

les plans parallèles à YOX donnent des sections elliptiques; les plans parallèles aux deux autres plans de coordonnées donnent des sections hyperboliques.

Il y a donc sur les hyperboloïdes des sections elliptiques et hyperboliques.

Enfin, si l'on considère les plans tangents au cône, plans qui coupent cette surface suivant deux droites coïncidentes, les plans parallèles donneront, dans les hyperboloïdes, des sections du même genre, c'est-à-dire des paraboles.

297. Équation générale des sections paraboliques. Cette équation résulte immédiatemeut de la remarque que nous venons de faire; elle découle aussi très simplement, comme nous allons le montrer, de ce fait que la projection d'une parabole est encore une parabole,

Soit

$$\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a}+\mu\frac{y}{b}+\nu,$$

l'équation d'un plan quelconque. La projection de la courbe, intersection de ce plan avec l'un ou l'autre des hyperboloïdes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}(1-\lambda^2)+\frac{y^2}{b^2}(1-\mu^2)-\frac{2xy}{ab}\lambda\mu+\ldots=0.$$

Cette égalité représente une parabole, si l'on a

$$\lambda^2\mu^2=(1-\lambda^2)(1-\mu^2),$$

ou

$$\lambda^2+\mu^2=1.$$

En posant

$$\lambda=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mu=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \nu=\frac{\theta}{1+t^2}$$

et en considérant t et θ comme des paramètres arbitraires, l'équation demandée est

$$\frac{z}{c}(1+t^2)=(1-t^2)\frac{x}{a}+2t\frac{y}{b}+\theta.$$

298. Remarque. On peut déduire de cette équation, et l'on vérifie d'ailleurs sans difficulté, que les plans tangents au cône asymptote sont représentés par l'équation générale :

$$(1)\quad (1-t^2)\frac{x}{a}+2t\frac{y}{b}-(1+t^2)\frac{z}{c}=0.$$

En écrivant cette équation sous la forme :

$$t^2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)-2t\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-\frac{x}{a}=0.$$

on vérifie, que l'enveloppe des plans (1) est représentée par l'équation

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2=\left(\frac{z}{c}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{z}{c}-\frac{x}{a}\right),$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Cette surface enveloppe est donc le cône asymptote lui-même.

299. Représentation d'un point de H_1 et de H_2. L'identité évidente

$$(1+t\theta)^2+(t-\theta)^2-(t+\theta)^2=(1-t\theta)^2,$$

identité dont nous expliquons, un peu plus loin (§ 318), l'origine, prouve que les coordonnées d'un point M' de H_1, peuvent se représenter par les formules :

$$\frac{x'}{a}=\frac{1+t\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{y'}{b}=\frac{t-\theta}{1-t\theta},\qquad \frac{z'}{c}=\frac{t+\theta}{1-t\theta}.$$

D'après cette remarque, l'équation générale des plans tangents à H_1, sous une forme rationnelle, et avec deux paramètres variables, correspond à l'égalité

$$(T_1) \quad \frac{x}{a}(1+t\theta)+\frac{y}{b}(t-\theta)-\frac{z}{c}(t+\theta)=1-t\theta.$$

En se reportant à l'identité :

$$(1-t^2-\theta^2)^2+4t^2+4\theta^2=(1+t^2+\theta^2)^2,$$

qui a été employée plus haut (§ 263), et en l'écrivant sous la forme :

$$\left(\frac{1-t^2-\theta^2}{2\theta}\right)^2+\left(\frac{t}{\theta}\right)^2+1=\left(\frac{1+t^2+\theta^2}{2\theta}\right)^2,$$

on voit que les coordonnées x'', y'', z'', d'un point quelconque de H_2, peuvent être représentées par les formules

$$\frac{x''}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{2\theta}, \qquad \frac{y''}{b}=\frac{t}{\theta}, \qquad \frac{z''}{c}=\frac{1+t^2+\theta^2}{2\theta}.$$

L'équation générale des plans tangents à H_2 est, d'après cette remarque,

$$(T_2) \quad \frac{x}{a}(1-t^2-\theta^2)+2t\frac{y}{b}-(1+t^2+\theta^2)\frac{z}{c}+2\theta=0.$$

300. Section de H_1 par un plan tangent. Par un point de H_1, passent, comme nous le montrerons dans la leçon suivante, deux génératrices réelles ; lesquelles, pour un motif connu (§ 90), constituent le plan tangent au point considéré. Mais nous nous proposons de vérifier cette proposition par un calcul direct.

L'équation (T_1) du paragraphe précédent peut s'écrire

$$(1) \quad \left(\frac{x}{a}-1\right)+t\theta\left(\frac{x}{a}+1\right)=t\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)+\theta\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right).$$

L'intersection que nous voulons étudier est déterminée

par le plan qui correspond à cette équation et par la surface H_1, dont l'équation peut s'écrire

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Élevons les deux membres de l'égalité (1) au carré et observons que les termes

$$(3) \quad 2t\theta\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right), \qquad 2t\theta\left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

disparaissent. Nous obtenons, après cette réduction, la relation suivante:

$$\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2 + t^2\theta^2\left(\frac{x}{a} + 1\right)^2 = t^2\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right)^2 + \theta^2\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right)^2.$$

En retranchant aux deux membres, et respectivement, les expressions (3), il vient :

$$(4) \quad \left\{\left(\frac{x}{a} - 1\right) - t\theta\left(\frac{x}{a} + 1\right)\right\}^2 = \left\{t\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) - \theta\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right)\right\}^2.$$

Cette équation se décompose en deux et, précisément, ce fait analytique met en évidence la propriété géométrique de l'intersection que nous étudions ; il montre qu'elle se compose de deux droites G, G′. Les relations (1) et (4) donnent d'ailleurs les équations de ces droites, sous la forme :

$$(G) \begin{cases} \frac{x}{a} - 1 = t\left(\frac{z}{c} - \frac{y}{b}\right) \\ t\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \frac{z}{c} + \frac{y}{b} \end{cases} \qquad (G') \begin{cases} \frac{x}{a} - 1 = \theta\left(\frac{z}{c} + \frac{y}{b}\right) \\ \theta\left(\frac{x}{a} + 1\right) = \frac{z}{c} - \frac{y}{b}. \end{cases}$$

301. Plans sécants donnant des hyperboles équilatères. Parmi les sections planes remarquables des surfaces H_1 et H_2, nous signalerons celles qui sont formées par des hyperboles équilatères. Pour les déterminer nous observerons d'abord que si l'on imagine une de ces sections, en lui

menant par le centre un plan parallèle, celui-ci coupera le cône asymptote suivant deux génératrices rectangulaires.

Soit

$$\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}=0,$$

l'équation d'un plan P; celle du cône asymptote étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Les droites communes à ces deux surfaces seront rectangulaires si nous avons (§ 243)

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=\frac{\alpha^2}{a^4}+\frac{\beta^2}{b^4}-\frac{\gamma^2}{c^4},$$

ou, après réduction,

$$\alpha^2(b^2-c^2)+\beta^2(a^2-c^2)-\gamma^2(a^2+b^2)=0.$$

Telle est la condition que doivent remplir les paramètres α, β, γ, de l'équation

$$\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}=\lambda,$$

pour que le plan correspondant coupe la surface H_1 ou H_2, suivant une hyperbole équilatère.

302. Théorème. *Le lieu des points d'où partent deux génératrices rectangulaires de la surface* H_1, *est une courbe gauche située sur la sphère de Monge.*

Nous avons vu que tout plan tangent à H_1 coupait cette surface suivant deux génératrices ; cherchons à distinguer sur H_1 les points qui donnent deux génératrices rectangulaires.

Soit M l'un des ces points, et soit

$$\alpha\frac{x}{a}+\beta\frac{y}{b}+\gamma\frac{z}{c}=\lambda,$$

le plan tangent correspondant P. La section étant formée de

deux génératrices rectangulaires tous les plans parallèles à P coupent H_1 suivant des hyperboles homothétiques, c'est-à-dire, dans le cas présent, suivant des hyperboles équilatères.

Nous avons donc

$$\alpha^2(b^2-c^2)+\beta^2(a^2-c^2)-\gamma^2(a^2+b^2)=0.$$

Le point M est situé à l'intersection de la surface avec le diamètre conjugué de P, droite représentée par les équations

$$\frac{\frac{x}{a}}{\alpha}=\frac{\frac{y}{b}}{\beta}=\frac{\frac{z}{c}}{\gamma}.$$

Ainsi, les coordonnées du point M vérifient les deux égalités :

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2}(b^2-c^2)+\frac{y^2}{b^2}(a^2-c^2)-\frac{z^2}{c^2}(a^2+b^2)=0,$$

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

La première peut s'écrire

$$\frac{x^2}{a^2}(a^2+b^2-c^2)+\frac{y^2}{b^2}(a^2+b^2-c^2)-\frac{z^2}{c^2}(a^2+b^2-c^2)$$
$$-x^2-y^2-z^2=0$$

ou, en tenant compte de (2),

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

Le théorème énoncé se trouve ainsi établi.

303. Remarque. On pouvait prévoir *à priori* que les points cherchés appartenaient à la sphère de Monge.

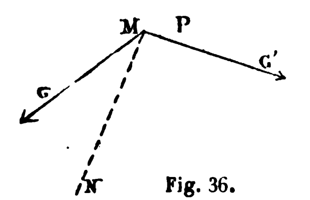


Fig. 36.

En effet, soit M un point du lieu ; et soient MG, MG', les génératrices qui passent par ce point et que nous supposons rectangulaires ; traçons encore la nor-

male MN et considérons le trièdre M, NGG′. Tout plan passant par une droite située sur une quadrique, coupe cette surface suivant deux droites et, par conséquent est un plan tangent. Le trièdre M, NGG′ est donc constitué par trois plans tangents à H_1 ; et comme il est trirectangle, le point M est situé sur la sphère de Monge.

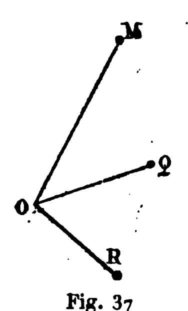


Fig. 37

On peut encore raisonner de la manière suivante :

Imaginons le plan diamétral conjugué de OM : il coupe H_1 suivant une hyperbole équilatère, puisque les sections parallèles sont homothétiques. Soient OQ et OR les axes de cette section; ces droites sont égales et le théorème I d'Apollonius donne

$$\overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2 - \overline{OR}^2 = a^2 + b^2 - c^2.$$

ou

$$\overline{OM}^2 = a^2 + b^2 - c^2;$$

le lieu du point M appartient donc à la sphère de Monge. Mais il faut observer que ni l'une ni l'autre de ces deux démonstrations géométriques n'ont la rigueur désirable; parce qu'elles n'établissent pas que, *réciproquement*, tout point pris sur H_1, et sur la sphère de Monge qui lui correspond, jouit de la propriété énoncée.

VINGT-SIXIÈME LEÇON

GÉNÉRATRICES RECTILIGNES DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

304. Équations générales des génératrices rectilignes de H_1. L'équation de H_1 peut s'écrire sous l'une ou l'autre des formes :

$$\frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{z}{c}-\frac{y}{b}}=\frac{\frac{z}{c}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+1}=t, \qquad \frac{\frac{x}{a}-1}{\frac{z}{c}+\frac{y}{b}}=\frac{\frac{z}{c}-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+1}=\theta.$$

Les deux plans correspondant aux équations.

$$(G)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{a}-1&=t\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right)\\ t\left(\frac{x}{a}+1\right)&=\frac{z}{c}+\frac{y}{b}\end{aligned}\right.$$

représentent une droite G dont tous les points sont situés sur H_1. En effet, toute solution (x', y', z') des équations (G), doit vérifier la combinaison obtenue en multipliant ces égalités, membre à membre, combinaison qui donne

$$\frac{x'^2}{a^2}-1=\frac{z'^2}{c^2}-\frac{y'^2}{b^2},$$

ou,

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1.$$

On voit, de même, que les équations :

$$(G') \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} - 1 = \theta\left(\dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b}\right) \\ \theta\left(\dfrac{x}{a} + 1\right) = \dfrac{z}{c} - \dfrac{y}{b} \end{cases}$$

représentent une droite placée, elle aussi, tout entière, sur H_1.

305. Représentation trigonométrique des génératrices. Si nous résolvons les équations (G) par rapport à $\frac{x}{a}$ et $\frac{y}{b}$, nous avons :

$$\frac{x}{a} = \frac{2t}{1+t^2}\frac{z}{c} + \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$\frac{y}{b} = -\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{z}{c} + \frac{2t}{1+t^2};$$

et si nous posons, comme nous l'avons déjà fait en géométrie plane (§ 283),

$$\cos\varphi = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2t}{1+t^2},$$

les formules (G) prennent la forme suivante :

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi, \\ \dfrac{y}{b} = -\dfrac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi. \end{cases}$$

Le même calcul appliqué aux formules (G′) donne :

$$(\Gamma') \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{z}{c}\sin\psi + \cos\psi, \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}\cos\psi - \sin\psi. \end{cases}$$

Aux équations (G), ou (Γ), correspondent des droites, en nombre infini ; elles forment un premier système de génératrices ; les égalités (G′), ou (Γ′) représentent un second sys-

tème de génératrices. Nous allons étudier les propriétés principales des droites qui constituent ces deux systèmes.

306. Théorème I. *Par un point* M′ *de l'hyperboloïde à une nappe passe une droite de chacun des systèmes.*

Soient (x', y', z') les coordonnées de M′; considérons les deux rapports égaux :

$$\frac{\frac{x'}{a}-1}{\frac{z'}{c}-\frac{y'}{b}}, \qquad \frac{\frac{z'}{c}+\frac{y'}{b}}{\frac{x'}{a}+1},$$

et désignons par t' leur valeur commune. Si, dans les formules (G) nous donnons au paramètre variable t, cette valeur t', la droite représentée par les équations :

$$\frac{x}{a}-1=t'\left(\frac{z}{c}-\frac{y}{b}\right), \qquad t'\left(\frac{x}{a}+1\right)=\frac{z'}{c}+\frac{y'}{b},$$

passe, visiblement, par M′; de plus, comme toutes les droites (G′), elle se trouve située tout entière sur l'hyperboloïde.

Le même raisonnement est applicable aux droites (G′), en considérant les deux rapports égaux :

$$\frac{\frac{x'}{a}-1}{\frac{z'}{c}+\frac{y'}{b}}, \qquad \frac{\frac{z'}{c}-\frac{y'}{b}}{\frac{x'}{a}+1},$$

et en prenant pour θ, le nombre θ' qui représente la valeur commune de ces deux rapports.

Cette propriété des droites G et G′, légitime, pour chacune d'elles, le mot de *génératrices* par lequel elles sont désignées.

307. Théorème II. *Il n'y a pas sur la quadrique* H_1 *d'autres droites que celles qui appartiennent à l'un ou à l'autre des systèmes* (G), (G′).

En effet soit Δ une droite quelconque située sur H_1; prenons sur Δ un point M′. Nous venons de montrer que par ce

point M′ passaient une droite G et une droite G′. D'ailleurs, ces droites G et G′ sont toujours distinctes et c'est ce que montrent très nettement les équations (Γ) et (Γ′). Ainsi, par le point M′, passeraient, sur H_1, trois droites distinctes. L'impossibilité de ce fait géométrique résulte de ce que les trois droites en question seraient situées, toutes les trois, dans le plan tangent à H_1, en M′; les droites de ce plan rencontreraient la quadrique en trois points, ce qui ne peut pas être.

308. Théorème III. *Deux génératrices appartenant à des systèmes différents sont toujours situées dans un même plan.*

Pour vérifier que les équations (Γ) et (Γ′) sont compatibles, il suffit de reconnaître que les équations :

$$(1)\quad \frac{z}{c}(\sin\varphi - \sin\psi) = \cos\psi - \cos\varphi,$$

$$(2)\quad \frac{z}{c}(\cos\varphi + \cos\psi) = \sin\varphi + \sin\psi,$$

donnent pour z la même valeur; or, ceci résulte de l'identité évidente

$$\sin^2\varphi - \sin^2\psi \equiv \cos^2\psi - \cos^2\varphi.$$

On vérifiera d'ailleurs, sans difficulté, que les deux génératrices (Γ), (Γ′), sont situées dans le plan

$$(\text{A})\quad \frac{x}{a}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\varphi-\psi}{2} - \frac{z}{c}\sin\frac{\varphi+\psi}{2} = \cos\frac{\varphi+\psi}{2}.$$

309. Théorème IV. *Deux génératrices du même système ne sont jamais situées dans un plan commun.*

Il faut établir l'incompatibilité des équations :

$$\frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi + \cos\varphi, \qquad \frac{x}{a} = \frac{z}{c}\sin\varphi' + \cos\varphi'$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi + \sin\varphi; \qquad \frac{y}{b} = -\frac{z}{c}\cos\varphi' + \sin\varphi'.$$

Or, ces égalités donnent

$$\frac{z}{c}(\sin\varphi - \sin\varphi') = \cos\varphi' - \cos\varphi,$$

et,

$$\frac{z}{c}(\cos\varphi - \cos\varphi') = \sin\varphi - \sin\varphi'.$$

Ces deux relations, si l'on suppose $\varphi - \varphi' \neq 0$, conduisent à celle-ci

$$\frac{z^2}{c^2} + 1 = 0,$$

égalité qui prouve l'incompatibilité du système considéré.

310. Génératrices parallèles. Parmi les génératrices qui appartiennent à des systèmes différents, et qui sont situées dans un même plan, on peut distinguer celles qui sont parallèles.

Pour que les formules (1) et (2) (§ 308), donnent pour $\frac{z}{c}$ des valeurs infinies, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\sin\varphi - \sin\psi = 0, \quad \text{et} \quad \cos\varphi + \cos\psi = 0;$$

égalités qui entraînent la suivante :

$$\varphi + \psi = \pi.$$

La relation (A) (§ 308), prouve que l'équation générale des plans P qui coupent H_1 suivant deux génératrices parallèles, est

$$(1) \quad \frac{x}{a}\cos\alpha + \frac{y}{b}\sin\alpha - \frac{z}{c} = 0.$$

Dans cette égalité, α qui, d'après l'équation citée, représente $\frac{\varphi - \psi}{2}$, est un paramètre arbitraire.

311. On peut d'ailleurs vérifier le résultat précédent. Cherchons l'intersection du plan P avec H_1 ; les équations :

$$\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha-\frac{z}{c}=0,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1;$$

donnent, par combinaison,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\left(\frac{x}{a}\cos\alpha+\frac{y}{b}\sin\alpha\right)^2=1,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{y^2}{b^2}\cos^2\alpha-\frac{2xy}{ab}\sin\alpha\cos\alpha=1,$$

ou, enfin,

$$\frac{x}{a}\sin\alpha-\frac{y}{b}\cos\alpha=\pm 1.$$

L'intersection de P avec le cône asymptote donne, par le même calcul,

$$\left(\frac{x}{a}\sin\alpha-\frac{y}{b}\cos\alpha\right)^2=0.$$

Ainsi, tout plan P correspondant à l'équation (1) est tangent au cône asymptote, le long d'une certaine droite OG_1 (fig. 40) et coupe l'hyperboloïde suivant deux génératrices de systèmes différents, DG, D'H', qui sont parallèles à OG_1.

Comme l'équation (1) représente l'équation générale des plans tangents au cône asymptote, le calcul précédent prouve que, **réciproquement**, *tout plan tangent au cône asymptote coupe l'hyperboloïde suivant deux droites qui sont, l'une et l'autre, parallèles à la génératrice de contact.*

312. Si l'on considère la section faite dans le cône asymptote par un plan passant par OZ, on obtient deux génératrices de ce cône, OG_1 et OH_1. Ces droites sont également inclinées sur OZ, parce que OZ est un axe de symétrie du cône. Les plans tangents au cône le long des droites OG_1, OH_1, coupent la surface H_1 suivant des couples de droites respectivement parallèles à celles-ci.

On reconnaît ainsi que les sections faites dans H_1 par deux plans tangents, ayant pour points de contact les extrémités d'un diamètre de l'ellipse de gorge, sont formées par deux couples de génératrices ; ces génératrices sont, deux à deux, parallèles.

Si l'on considère, en particulier, les deux génératrices DG et DH qui passent par le point D de l'ellipse de gorge leur plan a pour trace sur le plan de cette ellipse la tangente ST ; de plus elles sont situées dans un même plan avec la normale au plan de l'ellipse, droite passant par leur point de concours ; enfin, cet axe du plan est une des bissectrices de l'angle qu'elles forment.

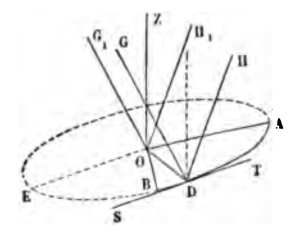


Fig. 38.

Nous reviendrons tout à l'heure sur ces propriétés que nous démontrerons autrement.

313. On voit aussi, parmi les corollaires de la proposition que nous venons d'établir, que *les génératrices de l'un ou de l'autre système, transportées parallèlement à elles-mêmes, au centre de la quadrique, engendrent le cône asymptote.* Cette remarque avait déjà été faite, sur l'équation générale (§ 154).

314. Enfin on peut encore observer que *trois génératrices de H_1 ne sont pas parallèles à un même plan.*

En effet, si l'on transporte ces trois droites, parallèlement à elles-mêmes, au centre de la quadrique, on a trois génératrices du cône asymptote ; lesquelles ne peuvent pas être situées dans un même plan.

315. Thorème V. *Si l'on considère un plan central* P *et une génératrice* G, *la projection de* G *sur le plan* P, *projection faite parallèlement au diamètre conjugué de* P, *est une droite tangente à la section centrale considérée.*

Soit A le point commun à P et a G. Choisissons, sur G, un point M et menons, par N, une parallèle MM′ à la droite AC, droite dont la direction est conjuguée de P. Cette parallèle MM′ rencontre P au point B ; prenons M′B = BM ; aux points tels que M, de la droïte G, correspondent des points tels que M′, situés sur une droite G′, passant par A ; et puisque P est un plan diamétral conjugué des cordes parallèles à AC, tous ces points M′ sont situés sur la quadrique considérée Q.

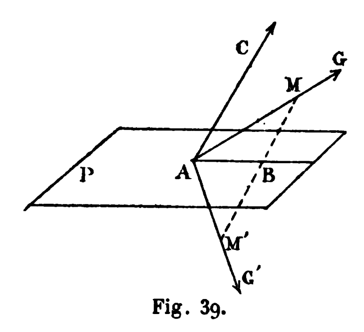


Fig. 39.

Ainsi, les droites AG et AG′ sont deux droites de Q et le plan AGG′, formé par ces génératrices, est le plan tangent à Q, au point A. Ce plan coupe P suivant une droite AB, droite qui, par conséquent, représente la tangente à la section faite par le plan P, dans la surface Q.

316. Théorème VI. *Par un point* D, *pris sur l'ellipse de gorge passent deux génératrices* DG, DH :

1° *Ces droites, et la tangente en* D *à l'ellipse de gorge, sont situées dans un même plan, avec la normale en* D *au plan de l'ellipse.*

2° *Cette normale et cette tangente sont les bissectrices des angles formés par les deux génératrices considérées.*

Soit M un point quelconque de DG; projetons ce point en *m* sur le plan de l'ellipse et prolongeons M*m*, jusqu'en M′,

d'une longueur égale à elle-même. La droite Dm représente la projection de DG sur le plan de l'ellipse, Dm est donc la tangente en D à l'ellipse de gorge (§ 315).

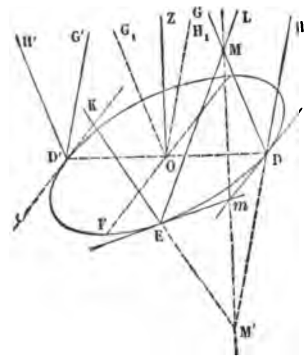


Fig. 40.

D'autre part la droite DM′ étant, par rapport au plan de l'ellipse, la symétrique de DM, se trouve tout entière située sur l'hyperboloïde; DM′ représente donc la *seconde génératrice* passant par D.

Cela posé; l'égalité des angles MDm, M′Dm prouve que Dm est bissectrice de l'angle MDM′. En menant par D une parallèle à MM′ on obtient une normale au plan de l'ellipse qui est située dans le plan MDM′ et qui est la bissectrice de l'angle GDH. La proposition se trouve donc démontrée.

317. Théorème VII. *Le cône asymptote est le lieu des asymptotes des sections centrales de l'hyperboloïde.*

Démonstration géométrique. Soit OAC le plan d'une section centrale et soit OB le diamètre conjugué. Considérons aussi l'ellipse qui a pour diamètres conjugués OA et OB. Le plan AOC coupe la surface suivant une hyperbole, soit M un point de cette courbe. Menons la tangente MD_1 à cette hyperbole et, par le point D_1, une parallèle DD′ à BB′. Il résulte d'un théorème précédent (§ 315) que le plan MD_1DD' coupe la surface suivant deux génératrices passant par M; or, les points M, D, D′, sont trois points de cette intersection; celle-ci est donc constituée par les droites MD et MD′.

Supposons maintenant que le point M considéré s'éloigne à l'infini; MD_1 a, comme l'on sait, pour position limite, l'asymptote OH_1. D'autre part, DD' à la limite, se confond avec BB', puisque D_1 vient se placer au point O. Les droites MD

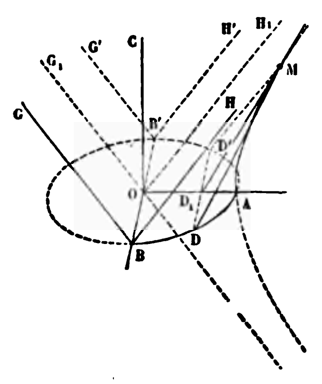


Fig. 41.

et MD' deviennent donc deux génératrices BH, B'H', parallèles à OH_1. D'après cela, on peut conclure que OH_1 étant une génératrice de la surface, transportée parallèlement à elle-même au centre de celle-ci, est une génératrice du cône asymptote.

318. *Démonstration analytique.* Ces considérations géométriques établissent la proposition énoncée, proposition qu'on peut aussi démontrer très simplement par l'analyse.

Prenons, ce qui n'est pas beaucoup plus compliqué, la notation générale; et considérons l'hyperboloïde qui correspond à l'équation

$$(1)\quad \varepsilon(ax+by+cz)^2+\varepsilon'(a'x+b'y+c'z)^2 + \varepsilon''(a''x+b''y+c''z)^2=1.$$

Par l'origine menons un plan sécant quelconque, représenté par l'équation

$$(2)\quad \alpha x+\beta y+\gamma z=0.$$

Les paramètres α, β, γ, ne sont pas nuls à la fois; nous supposerons $\gamma \neq 0$. Les équations (1) et (2) représentent une courbe du second ordre U, dont la projection sur le plan XOY a pour équation

$$(3)\quad \varepsilon\left\{ax+by-\frac{c}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\}^2+\varepsilon'\left\{a'x+b'y-\frac{c'}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\}^2 \\ +\varepsilon''\left\{a''x+b''y-\frac{c''}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\}^2=1.$$

Les asymptotes de U ont donc, sur le plan XOY, des projections représentées par l'équation

$$(4)\quad \varepsilon\left\{ax+by-\frac{c}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\}^2+\varepsilon'\left\{a'x+b'y-\frac{c'}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\} \\ +\varepsilon''\left\{a''x+b''y-\frac{c''}{\gamma}(\alpha x+\beta y)\right\}^2=0.$$

Pour avoir le lieu décrit par les asymptotes de U il suffit d'éliminer les paramètres variables α, β, γ, entre (2) et (4). Cette élimination est possible et donne

$$\varepsilon(ax+by+cz)^2+\varepsilon'(a'x+b'y+c'z)^2+\varepsilon''(a''x+b''y+c''z)^2=0.$$

La surface qui correspond à cette équation est bien le cône asymptote de l'hyperboloïde proposé.

On a remarqué que la base de cette démonstration est le principe évident suivant : *l'asymptote d'une courbe se projette sur un plan, suivant une droite asymptote à la projection de cette courbe, sur ce plan.*

319. Représentation plane des quadriques à centre. Nous terminerons cette leçon en montrant comment on est conduit à certaines identités, qui nous ont servi précédemment à représenter les coordonnées d'un point mobile sur une quadrique, au moyen de deux paramètres variables t, θ.

Les formules (G) et (G′) admettent, comme nous l'avons observé, une solution; et, en cherchant celle-ci, on trouve

que les coordonnées d'un point de H_1 sont exprimées par les formules, déjà signalées, mais qui se présentent ici plus naturellement,

$$(H_1)\quad \frac{x}{a}=\frac{1+t\theta}{1-t\theta},\quad \frac{y}{b}=\frac{t-\theta}{1-t\theta},\quad \frac{z}{c}=\frac{t+\theta}{1-t\theta}.$$

C'est de ces formules, et de la relation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

qu'on déduit, par voie naturelle, l'identité précédemment visée,

$$(1+t\theta)^2+(t-\theta)^2-(t+\theta)^2\equiv(1-t\theta)^2.$$

Posons maintenant :

$$t-\theta=2u,\quad t+\theta=2v;$$

et nous avons

$$(1+v^2-u^2)^2+4u^2-4v^2\equiv(1-v^2+u^2)^2.$$

Si, dans cette identité, nous changeons v^2 en $-v^2$ (ou v, en iv), l'identité subsiste et s'écrit, sous une forme nouvelle,

$$(1-v^2-u^2)^2+4u^2+4v^2\equiv(1+v^2+u^2)^2.$$

C'est cette identité que nous avons considérée plus haut (§ 263 et 299), et qui nous a permis de représenter les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde, et celles d'un point de l'hyperboloïde à deux nappes, par les formules que nous rappelons ici :

$$(E)\quad \frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{y}{b}=\frac{2t}{1+t^2+\theta^2},\quad \frac{z}{c}=\frac{2\theta}{1+t^2+\theta^2};$$

$$(H_2)\quad \frac{x}{a}=\frac{1-t^2-\theta^2}{2\theta},\quad \frac{y}{b}=\frac{t}{\theta},\quad \frac{z}{c}=\frac{1+t^2+\theta^2}{2\theta}.$$

Ces formules diverses : (H_1), (E), (H_2); permettent de représenter les quadriques à centre, point par point, sur un plan P.

Imaginons en effet, dans le plan P, deux axes fixes, rectangulaires, ωt, $\omega\theta$. A tout point m', pris sur P, correspondent des coordonnées t',θ' ; en transportant ces valeurs dans les formules (E), par exemple, on obtiendra des valeurs correspondantes x',y',z', qui représéntent les coordonnées d'un point M′ situé sur l'ellipsoïde. Ainsi, *à tout point du plan* P *correspond un point de l'ellipsoïde.*

Si l'on cherche à résoudre les formules (E) par rapport à t et à θ, on voit que la première fait connaître $t^2 + \theta^2$; les deux autres donnent alors t et θ. Ainsi, **réciproquement**, *à un point de l'ellipsoïde correspond un point unique et bien déterminé du plan* P.

Cette remarque fondamentale s'applique aux formules (H_1) et (H_2) ; et l'on conçoit ainsi comment on peut représenter les quadriques à centre, point par point, sur un plan.

Lorsque le point considéré M est mobile, tout à la fois, sur l'ellipsoïde et sur un plan Π, représenté par l'équation

$$\alpha \frac{x}{a} + \beta \frac{y}{b} + \gamma \frac{z}{c} + \delta = 0,$$

le point correspondant m du plan P a des coordonnées t, θ, qui vérifient constamment l'égalité

$$\alpha(1 - t^2 - \theta^2) + 2\beta t + 2\gamma\theta + \delta(1 + t^2 + \theta^2) = 0.$$

Cette équation représente un cercle ; ainsi *à une ellipse tracée sur l'ellipsoïde correspond un cercle dans le plan transformé* P.

On remarque que si l'on suppose $\alpha = \delta$, l'équation précédente représente une droite. Dans ce cas l'ellipse correspondante, tracée sur l'ellipsoïde, passe par le sommet A′ $(-a, o, o)$, .

La réciproque est vraie ; *toutes les droites du plan* P *proviennent des ellipses qui passent pa" le sommet* A′.

Ces remarques donnent lieu à des conséquences nombreuses mais nous ne pouvons pas insister autrement sur ce sujet, qui touche pourtant, par un point élémentaire et intéressant, à la théorie générale des *surfaces omaloïdes* ou *surfaces unicursales*. [V. **Sylvester**. *Nel Cambridge and Dublin Math. Journal*, t. VI, p. 12. — **Cremona**. *Sulle trasformazioni razianoli nello spazio. Rendiconti* del Reale Instituto Lombardo. Série II, vol. IV, fas. X (mai 1871). — **Picart**. *Thèse de mathématiques*, 1878. — Voyez aussi *Le Journal de Mathématiques spéciales ;* sept. 1884.]

EXERCICES

1. *Démontrer que le produit des sinus des angles que fait une génératrice d'un hyperboloïde, avec les plans cycliques réels, est constant.*

2. *On considère trois génératrices* G, G′, G″ *de l'hyperboloïde ; par* G′ *on peut mener un plan* P *parallèle à* G″, *et, par* G″ *un plan* Q *parallèle à* G′. *Soit* M *un point pris sur l'hyperboloïde ; si par* M *on mène une parallèle à* G, *cette parallèle rencontre* P *en* C *et* Q *en* γ *; on obtient ainsi un rapport* $\frac{MC}{M\gamma}$ *; puis deux autres analogues. Démontrer que l'on a*

$$\frac{MA}{M\alpha}\cdot\frac{MB}{M\beta}\cdot\frac{MC}{M\gamma}=1.$$

En prenant (au lieu des axes indiqués par Binet, § 332) trois axes de coordonnées menés par un point de l'espace, parallèlement aux génératrices G, G′, G″, on trouve que la surface est représentée par une équation de la forme :

$$(1)\quad (x-a)(y-b)(z-c)=(x-a')(y-b')(z-c'),$$

les équations des génératrices étant, dans le système d'axes indiqué,

$$x=a,\qquad x=a',\qquad y=b;$$
$$y=b';\qquad z=c;\qquad z=c'.$$

La relation (1) établit la proposition énoncée.

3. *Trouver, au moyen des formules* Γ (§ 305), *le lieu des points de l'hyperboloïde, d'où partent deux génératrices rectangulaires.*

4. *On considère un ellipsoïde et sur l'axe* OX *un point fixe* R (OR $= \alpha$); *par ce point* R *on fait passer deux plans tangents* Π, Π' *dont les traces* Δ, Δ' *sur* YOZ, *sont rectangulaires. Trouver le lieu décrit par le point* I, *point commnn aux droites* Δ, Δ'.

En adoptant les notations indiquées plus haut (§ 319) on trouve que les plans Π et Π' sont représentés, respectivement, par les équations

$$\frac{x}{a}(1 - t^2 - \theta^2) + 2t\frac{y}{b} + 2\theta\frac{z}{c} = 1 + t^2 + \theta^2$$

$$\frac{x}{a}(1 - t^2 - \theta^2) - 2\theta\frac{y}{b} + 2t\frac{z}{c} = 1 + t^2 + \theta^2.$$

En faisant passer les termes en $\frac{x}{a}$ dans les seconds membres, et en ajoutant les égalités ainsi écrites, après les avoir élevées au carré, on trouve

$$(x^2 - a^2)\left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) = 2(x - \alpha)^2.$$

Cette équation représente le lieu décrit par la droite RI. Le lieu demandé, celui du point I lui-même, est une ellipse, homothétique à l'ellipse principale du plan YOZ.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON

LES PARABOLOÏDES.

320. Forme des paraboloïdes. Les surfaces de la seconde classe, qui vont nous occuper maintenant, peuvent, comme nous l'avons montré, être représentées, en axes rectangulaires, par l'équation réduite :

$$\frac{y^2}{p} \pm \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Dans cette égalité, p et q sont des paramètres positifs; le signe $+$ correspond à la surface que nous avons nommée **paraboloïde elliptique**; si l'on prend le signe $-$, l'équation représente le **paraboloïde hyperbolique**, qu'on nomme aussi **paraboloïde réglé.**

Si nous considérons d'abord la surface qui a pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x, \quad (p > 0,\ q > 0),$$

cette quadrique est située tout entière à la droite du plan YOZ. Les plans parallèles à YOZ donnent, dans la surface, des sections elliptiques, dont les axes grandissent au delà de toute limite, quand le plan sécant s'éloigne à l'infini dans la direction OX. Les autres sections principales sont des paraboles; et l'on peut ainsi se faire une idée générale de la forme de la surface, forme que nous avons déjà signalée, et que représente la figure ci-après.

Prenons maintenant l'équation :

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x, \qquad (p > 0, q > 0),$$

les sections principales sont formées par deux paraboles, et la troisième, par deux droites OA et OB situées dans le plan

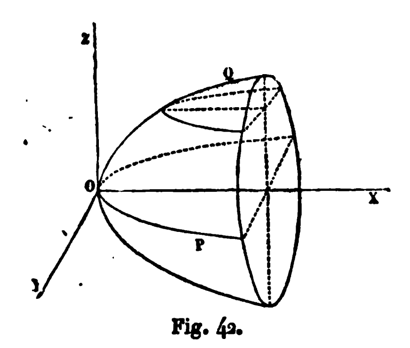


Fig. 42.

YOZ. La surface s'étend indéfiniment; de telle sorte que les plans parallèles aux plans YOX et ZOX donnent, constamment, des sections paraboliques; tandis que les sections faites

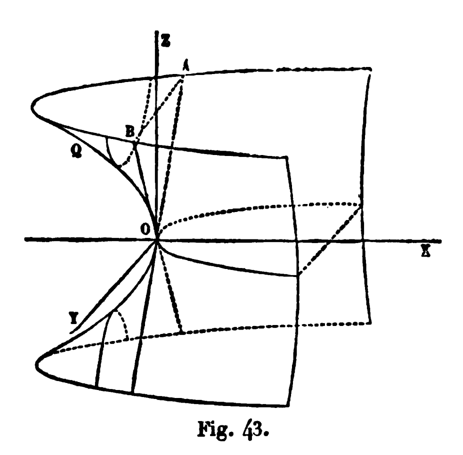


Fig. 43.

par les plans parallèles à ZOY donnent des hyperboles. La figure ci-dessus rappelle la forme de cette quadrique.

320 *bis*. **Théorème**. *Les sections planes du paraboloïd elliptique sont des ellipses, ou des paraboles.*

Le plan considéré P peut, en effet, suivant les cas, être, ou non, parallèle à l'axe OX, que nous appellerons *l'axe du paraboloïde.*

Si P est parallèle à OX, son équation est de la forme :

$$\alpha y + \beta z + \gamma = 0\,;$$

la section obtenue se projette sur le plan ZOX, ou sur le plan YOX, suivant une parabole; ce qui établit que la section, dans l'espace, est aussi une *parabole.*

Si, au contraire, P n'est pas parallèle à l'axe OX; alors son équation peut s'écrire :

$$x = my + nz + h\,,$$

et la section considérée se projette sur le plan YOZ suivant une courbe ayant pour équation

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2\,(my + nz + h).$$

Cette égalité représente une ellipse; les sections de la quadrique, par les plans non parallèles à son axe, sont donc aussi des *ellipses.*

En résumé, les sections planes du paraboloïde elliptique sont :

Des paraboles, si le plan sécant est parallèle à l'axe;

Des ellipses, si le plan sécant rencontre l'axe.

321. Théorème. *Les sections planes d'un paraboloïde hyperbolique sont : des paraboles, des hyperboles, ou des droites.*

On voit d'abord, comme dans le paragraphe précédent, que toutes les sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'axe sont des paraboles, et que celles qui sont obtenues par des plans rencontrant l'axe, sont des hyperboles.

Mais un fait particulier, que l'on doit signaler, résulte immédiatement de la forme de l'équation du paraboloïde hyperbo-

lique ; et l'on peut observer que les plans qui correspondent à l'une ou à l'autre des équations :

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = \lambda, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = \mu,$$

coupent, quels que soient λ et μ, la surface considerée suivant une droite.

Nous appellerons **plans directeurs** du paraboloïde hyperbolique ceux qui correspondent aux équations

$$\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}} = 0, \qquad \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 0,$$

ou des plans parallèles à ceux-ci. Tous ces plans coupent le paraboloïde suivant une seule droite, à distance finie.

Ainsi, les sections planes du paraboloïde hyperbolique sont :

Des paraboles, lorsque la section est faite par des plans parallèles à l'axe ;

Des hyperboles, si le plan considéré coupe l'axe ;

Des droites, si la section est faite par certains plans particuliers ; par exemple : par les plans parallèles à l'un des plans directeurs, ou, plus généralement, par les plans tangents à la surface, comme nous allons le montrer.

322. Plan tangent. Lorsque l'équation d'une surface est

$$\text{(P)} \quad A'y^2 + A''z^2 = 2x,$$

le plan tangent au point (x',y',z') est représenté par l'équation

$$A'yy' + A''zz' = x + x'.$$

En observant que

$$2x' = A'y'^2 + A''z'^2,$$

on peut écrire l'équation du plan tangent sous la forme

$$(T_1) \quad A'yy' + A''zz' - x = \frac{A'y'^2 + A''z'^2}{2},$$

égalité qui ne renferme plus que deux paramètres arbitraires y' et z' ; l'ordonnée et la cote du point de contact.

322 *bis*. Plan tangent parallèle à un plan donné. En identifiant l'équation précédente avec celle-ci :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0,$$

on a

$$-\frac{\beta}{\alpha} = A'y', \quad -\frac{\gamma}{\alpha} = A''z', \quad \text{et} \quad -\frac{\lambda}{\alpha} = \frac{A'y'^2 + A''z'^2}{2};$$

et, par suite,

$$-\lambda\alpha = \frac{\beta^2}{2A'} + \frac{\gamma^2}{2A''}.$$

L'équation générale des plans tangents au paraboloïde est donc

$$(T_2) \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\beta^2}{A'} + \frac{\gamma^2}{A''}\right).$$

323. Section du paraboloïde par le plan tangent. Si l'on considère les deux équations simultanées :

$$(1) \quad A'y^2 + A''z^2 - 2x = 0,$$
$$(2) \quad 2A'yy' + 2A''zz' - 2x - A'y'^2 - A''z'^2 = 0,$$

on en déduit

$$(3) \quad A'(y - y')^2 + A''(z - z')^2 = 0.$$

Si $A'A''$ est positif, cette équation admet une solution unique $y = y', z = z'$; et l'équation (1) donne pour x une seule valeur

$$\frac{A'y'^2 + A''z'^2}{2},$$

c'est-à-dire x'. Ainsi, *dans les paraboloïdes elliptiques le plan tangent n'a qu'un point commun réel avec la surface.*

Au contraire, si l'on a $A'A'' < 0$, l'équation (3) se décompose et se trouve vérifiée par les solutions réelles de l'une ou de l'autre des équations :

$$y - y' = \sqrt{-\frac{A''}{A'}}\,(z - z'), \qquad y - y' = -\sqrt{-\frac{A''}{A'}}\,(z - z').$$

En combinant successivement ces équations avec l'égalité (2), on voit que *le plan tangent au paraboloïde hyperbolique coupe la surface suivant deux droites.*

324. Plans cycliques du paraboloïde elliptique. Conformément à la méthode générale qui permet de déterminer les plans cycliques, nous devons exprimer que la forme quadratique :

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - \lambda\,(x^2 + y^2 + z^2),$$

est réductible à une somme de deux carrés. Abstraction faite de la solution évidente $\lambda = 0$, nous avons pour λ deux autres valeurs : $\frac{1}{p}$, et $\frac{1}{q}$.

En supposant $p > q$, les plans cycliques réels correspondent aux équations :

$$z = x\sqrt{\frac{q}{p-q}}, \quad \text{et} \quad z = -x\sqrt{\frac{q}{p-q}}.$$

On voit donc *que les plans cycliques du paraboloïde elliptique passent par l'axe* OY, *droite qui est perpendiculaire à celle des deux sections principales paraboliques qui a le plus petit paramètre.*

325. Plans diamétraux. Les plans diamétraux de la surface (P) sont représentés par l'équation

$$A'\beta y + A''\gamma z - \alpha = 0,$$

α, β, γ, étant les coordonnées du point directeur de la droite qu'on suppose parallèle aux cordes considérées. On observera que le plan qui correspond à l'équation précédente, quels que soient α, β, γ, est parallèle à l'axe du paraboloïde. Ainsi : *Dans les paraboloïdes, tous les plans diamétraux sont parallèles à l'axe de la surface.*

326. Diamètre. Au plan qui a pour équation

$$lx + my + nz = 0,$$

correspond un diamètre conjugué Δ, représenté par les équations

$$\frac{A'y}{m} = \frac{A''z}{n} = \frac{-1}{l}.$$

On voit donc que Δ est parallèle à OX et l'on peut dire que *tous les diamètres des paraboloïdes sont parallèles à l'axe de la surface.*

On remarquera qu'*un diamètre quelconque rencontre la surface en un point seulement, à distance finie.* Ce fait géométrique caractérise les diamètres, parce que toute droite parallèle à OX ($y = \lambda$, $z = \mu$) peut être considérée comme le diamètre des plans parallèles au plan qui correspond à l'équation

$$x = A'\lambda y + A''\mu z.$$

327. Plan de Monge. Théorème. *Le lieu des sommets des angles trièdres trirectangles qui sont circonscrits à un paraboloïde, est un plan perpendiculaire à l'axe de la surface.*

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point du lieu ; l'équation

$$(1) \quad (A'y^2 + A''z^2 - 2x)(A'y_0^2 + A''z_0^2 - 2x_0) = (A'yy_0 + A''zz_0 - x - x_0)^2,$$

représente le cône circonscrit au paraboloïde, cône ayant pour sommet le point considéré. En appliquant à cette équation la relation connue (§ 248), relation qui exprime que la sur-

face (1) est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, on a :

$$A'A''(A''z_0^2 - 2x_0)(A'y_0^2 - 2x_0) - A'(A''z_0^2 - 2x_0) \\ - A''(A'y_0^2 - 2x_0) - A'^2A''^2y_0^2z_0^2 - A'^2y_0^2 - A''^2z_0^2 = 0 .$$

On voit disparaître le terme $A'^2A''^2y_0^2z_0^2$; et, en mettant en évidence le facteur $A'y_0^2 + A''z_0^2 - 2x_0$, lequel s'introduit nécessairement dans le résultat, pour des raisons déjà données (§ 266), on a, finalement,

$$(A'y_0^2 + A''z_0^2 - 2x_0)(2x_0A'A'' + A' + A'') = 0 .$$

Le lieu cherché est donc constitué par tous les points du plan qui correspond à l'équation

$$x = -\frac{A' + A''}{2A'A''} = -\frac{p}{2} \pm \frac{q}{2} .$$

328. Génératrices rectilignes du paraboloïde hyperbolique. L'équation de cette surface peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{p}}}{2x} = \frac{1}{\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}} = t ,$$

t désignant la valeur commune de ces deux rapports. Si l'on considère la droite g qui correspond aux équations

$$(g) \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{\sqrt{p}} + \frac{z}{\sqrt{q}} = 2tx , \\ t\left(\frac{y}{\sqrt{p}} - \frac{z}{\sqrt{q}}\right) = 1 ; \end{array} \right.$$

toute solution de ces équations vérifie aussi, *quel que soit t*, la combinaison obtenue en les multipliant, membre à membre. La droite g est donc située tout entière sur le paraboloïde hyperbolique considéré.

Cette remarque s'applique à la droite g' qui est représentée par les équations :

$$(g') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y}{\sqrt{p}} - \dfrac{z}{\sqrt{q}} = 2\theta x, \\ \theta\left(\dfrac{y}{\sqrt{p}} + \dfrac{z}{\sqrt{q}}\right) = 1. \end{array} \right.$$

329. Propriétés des génératrices. Les équations précédentes permettent de vérifier très facilement, et par des calculs tout semblables à ceux que nous avons faits, quand nous avons étudié les génératrices de l'hyperboloïde à une nappe, les propriétés suivantes que nous nous bornons à énoncer.

1° *Par un point du paraboloïde hyperbolique passe une génératrice de chacun des deux systèmes ; mais il ne passe aucune autre droite située tout entière sur la surface.*

2° *Deux génératrices du même système ne sont jamais dans un même plan ; mais deux génératrices appartenant à des systèmes différents sont toujours situées dans le même plan.*

3° *Par un point* **M**, *pris sur l'une des paraboles principales* P, *passent une droite* (g) *et une droite* (g') *; ces deux droites ont pour bissectrices : la tangente à* P, *et la normale au plan principal, au point considéré* **M.**

4° *Les droites* (g) *sont parallèles à l'un des plans directeurs ; les droites* (g') *sont parallèles au second plan directeur.*

5° *Deux génératrices* (g) *sont partagées par trois génératrices* (g') *en segments qui sont proportionnels.*

Cette dernière propriété est une conséquence géometrique de la précédente : elle prouve que les points d'intersection d'une génératrice mobile avec deux génératrices fixes, décrivent sur celles-ci deux divisions homographiques qui correspondent à l'équation

$$\alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

u et v designant les longueurs des segments variables.

330. Théorème. *Le lieu des points, par lesquels passent deux génératrices rectangulaires du paraboloïde hyperbolique, est l'hyperbole, intersection de la surface et du plan de Monge.*

Menons, par l'origine, des droites γ, γ', parallèles aux génératrices g et g'. Les équations de ces parallèles sont

$$(\gamma) \quad \frac{y}{\sqrt{p}} = \frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{x}{\left(\frac{1}{t}\right)},$$

$$(\gamma') \quad \frac{y}{\sqrt{p}} = -\frac{z}{\sqrt{q}} = \frac{x}{\left(\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Les droites γ, γ' sont rectangulaires si nous avons

$$p - q + \frac{1}{t\theta} = 0.$$

D'autre part, les équations (g) et (g'), donnent, par combinaison,

$$t\theta\left(\frac{y^2}{p} - \frac{z}{q}\right) = 1.$$

Les points cherchés appartiennent donc à la surface qui correspond à l'équation

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = q - p.$$

De plus, ils sont situés sur le paraboloïde, et nous avons

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x;$$

ainsi, les points considérés sont situés sur la surface et sur le plan de Monge, plan qui a pour équation (§ 327).

$$x = \frac{q - p}{2}.$$

Cette démonstration établit : non seulement que tous les points cherchés sont situés sur l'hyperbole que nous venons de signaler, mais encore que, *réciproquement*, tous les points de cette hyperbole font partie du lieu.

331. Remarque. Par un point M pris sur le paraboloïde hyperbolique passent trois droites remarquables ; 1° les deux génératrices ; 2° le diamètre du point M.

En prenant cette dernière droite pour axe des x, et les génératrices pour axes des y et des z, il est facile de reconnaître que l'équation de la surface prend la forme remarquable

$$(1) \quad yz = ax.$$

En effet, dans ce système d'axes, la section par le plan YOZ ($x = 0$) étant formée des axes OY, OZ, l'équation est certainement de la forme

$$yz = x(mx + ny + pz + a).$$

Les plans YOX, ZOX, sont des plans directeurs ; ils coupent donc la surface, chacun suivant une droite. Ainsi, pour $z = 0$, la section qu'on obtient et qui a pour équation

$$x(mx + ny + a) = 0,$$

doit se réduire à $x = 0$; on a donc $m = 0$, $n = 0$. On voit de même que p est nul ; et, finalement, la surface est représentée par l'égalité (1).

EXERCICES

1. *Que représente l'équation*

$$(ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z) = a''x + b''y + c''z \; ?$$

Dans cette question, comme dans tous les exercices analogues, on doit distinguer deux cas, suivant que les formes linéaires qui entrent dans l'équation sont, ou non, indépendantes.

2. *Étant donnée l'équation générale*

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

qui est supposée représenter un paraboloïde, trouver les équations de l'axe.

L'équation en S a une racine nulle; soient α, β, γ, les cosinus directeurs du plan principal qui correspond à cette racine nulle; ces cosinus se déterminent au moyen des égalités

$$(1) \quad \begin{cases} A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + A''\gamma = 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{AB - B'B''}} = \frac{\beta}{\dfrac{1}{A'B' - BB''}} = \frac{\gamma}{\dfrac{1}{A''B'' - BB'}}.$$

Le diamètre conjugué correspondant (l'axe demandé, par conséquent), a pour équations :

$$\frac{1}{\alpha} f_x' = \frac{1}{\beta} f_y' = \frac{1}{\gamma} f_z',$$

ou,

$$f_x'(AB - B'B'') = f_y'(A'B' - BB'') = f_z'(A''B'' - BB').$$

Ces équations sont en défaut quand on suppose, en même temps, $B' = 0$, et $B'' = 0$. Mais l'indétermination qui se présente ici n'est qu'apparente. Dans ce cas, les équations (1) s'écrivent

$$A\alpha = 0, \qquad A'\beta + B\gamma = 0, \qquad B\beta + A''\gamma = 0.$$

On a donc

$$\alpha = 0, \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{-B} = \frac{\gamma}{A'}.$$

Les équations de l'axe sont alors

$$f_x' = 0, \qquad Bf_z' + A''f_y' = 0.$$

3. *Trouver le lieu décrit par les normales menées aux paraboloïdes tout le long d'une génératrice fixe et donnée* G.

On pourra prendre les axes de coordonnées rectangulaires suivants.

1° Pour origine, le point M ou G rencontre une des paraboles principales P ;

2° Pour axe OX. la tangente à P au point M ; pour axe OY, la normale

3° Pour axe OZ, une normale au plan P.

Dans ce système d'axes, l'équation de la surface s'écrit sous la forme

$$z^2 = (mx + Ay)^2 + 2\beta y.$$

En considérant la génératrice

$$(y = 0, \quad z = mx),$$

le lieu est un paraboloïde hyperbolique ayant pour équation

$$m(x + mz)\{A(mx - z) - y(1 + m^2)\} = \beta(1 + m^2)(z - mx).$$

4. *On considère sur le paraboloïde hyperbolique deux génératrices fixes* OA, OA'*; sur ces droites on prend deux points mobiles* B, B' *tels que* OB + OB' *soit constant.*

Cela posé, par le point B *passe une seconde génératrice* γ, *et par le point* B, *une génératrice* γ', *autre que* OA'; *ces droites* γ, γ', *se coupent en un point* I, *dont on demande le lieu géométrique.*

En prenant les axes indiqués dans l'exercice précédent, on observera que les droites OB, OB' étant également inclinées sur OX et OX', la somme de leurs projections sur XX' est constante. Les abcisses x_0, X_0, des points B et B', vérifient donc l'égalité

$$x_0 - X_0 = K.$$

On considère ensuite les plans tangents aux points B et B' et l'on trouve finalement, que le lieu cherché est une parabole située sur la surface et dans le plan qui a pour équation

$$z = - Km.$$

VINGT-HUITIÈME LEÇON

GÉNÉRATION DES QUADRIQUES.

Nous nous proposons d'indiquer maintenant quelques-unes des générations les plus remarquables des quadriques; et pour nous borner, dans un sujet très étendu, nous nous occuperons seulement de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique, surfaces qui, d'ailleurs, donnent lieu aux cas les plus intéressants que comporte cette étude.

GÉNÉRATIONS DE L'HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE

332. Théorème. *Lorsqu'une droite mobile rencontre constamment trois droites fixes, non parallèles à un même plan, elle engendre un hyperboloïde à une nappe.*

Soient AB, CD, EF les trois droites proposées et MNP une droite qui les rencontre, respectivement, aux points M, N, P. Par AB, on peut mener un plan parallèle à CD, et un autre plan parallèle à EF; ces deux plans ne se confondent pas, si, comme nous l'avons supposé, les trois droites AB, CD, EF, ne sont pas parallèles à un même plan.

En répétant cette construction pour CD et pour EF, on détermine un parallélipipède[1]; nous prendrons le centre de ce

1. Ce parallélipidède a été imaginé par Binet (*J. de l'Ecole Polytechnique* ; 16e cahier).

parallélipipède, pour origine des axes; ceux-ci étant d'ailleurs parallèles aux arêtes du parallélipipède, arêtes dont nous désignerons les longueurs par $2a$, $2b$, $2c$.

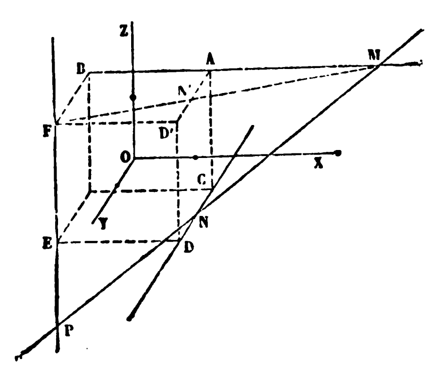


Fig. 44.

Dans ces conditions, les équations des droites proposées sont :

$$\text{EF}\left\{\begin{array}{l} x=-a, \\ y=b; \end{array}\right. \qquad \text{AB}\left\{\begin{array}{l} y=-b, \\ z=c; \end{array}\right. \qquad \text{CD}\left\{\begin{array}{l} z=-c, \\ x=a. \end{array}\right.$$

La droite MNP, qui s'appuie constamment sur EF et sur AB, peut être représentée par les équations :

$$(1)\quad x+a+\lambda(y-b)=0,$$
$$(2)\quad y+b+\mu(z-c)=0.$$

Écrivons maintenant que ces équations sont vérifiées par $z=-c$, et $x=a$, de façon à exprimer que la génératrice MNP rencontre la droite CD.

Nous avons donc

$$2a+\lambda(y-b)=0, \qquad y+b-2\mu c=0;$$

et, par suite, en éliminant y,

$$(3)\quad \lambda\mu c-\lambda b+a=0.$$

L'équation de la surface engendrée par MNP s'obtiendra en éliminant λ et μ entre (1), (2), et (3). Le résultat est :

$$\text{(H)} \quad a(y-b)(z-c)+b(x+a)(z-c)+c(x+a)(y+b)=0,$$

ou, en développant et en réduisant,

$$ayz+bzx+cxy+abc=0.$$

Cette relation remarquable peut encore s'écrire

$$\text{(H')} \quad \frac{yz}{bc}+\frac{zx}{ca}+\frac{xy}{ab}+1=0.$$

Ainsi, le lieu est une surface du second degré, ayant un centre et des génératrices rectilignes non concourantes; l'hyperboloïde à une nappe est la seule quadrique qui jouisse de ces propriétés.

333. Remarque. La forme (H) met en évidence six droites situées sur la surface, savoir: 1° les trois droites proposées AB, CD, EF; chose qu'on devait prévoir *à priori*, puisque la génératrice mobile s'appuie sur elles constamment; 2° les droites BF, DE, AC.

En effet, en coupant la surface (H) par le plan AB D'F ($z=c$), on trouve

$$y=-b, \quad \text{ou} \quad x=-a;$$

les droites BA et BF sont donc situées tout entières sur la surface.

334. Théorème. *Lorsqu'une droite mobile* Δ *engendre un hyperboloïde à une nappe* H_1 ; *si l'on considère deux génératrices quelconques, fixes et de systèmes différents sur cette surface,* Δ *décrit sur ces droites deux divisions qui sont homographiques.*

Soient fig. (44) AB, EF, les deux génératrices fixes considérées, MP la génératrice mobile, et BF une position particulière de MP. Il existe sur H_1 une droite parallèle à BF et qui appartient au même système que les droites AB et EF;

soit CD cette parallèle, droite qui rencontre nécessairement MP, en un certain point N, puisque CD est d'un système différent de celui auquel appartient EF et que MP est du même système que BF.

Si nous considérons maintenant les trois droites AB, CD, EF, on peut dire que H_1 est engendrée par le mouvement d'une droite s'appuyant sur ces trois droites fixes, et nous allons considérer le parallélipipède qui leur correspond et que nous avons défini dans le paragraphe précédent.

La droite MF rencontre AD' en N'; NN' représente une droite évidemment parallèle à EF et dont la longueur est égale à $2c$.

Les triangles semblables MNN', MFP, d'une part; MBF, MAN', d'autre part; donnent

$$\frac{NN'}{FP} = \frac{MN'}{MF} \quad \text{et} \quad \frac{MN'}{MF} = \frac{MA}{MB};$$

d'où,

$$\frac{NN'}{FP} = \frac{MA}{MB}.$$

Si nous posons

$$FP = u, \qquad BM = v,$$

la relation précédente devient

$$\frac{2c}{u} = \frac{v - 2a}{v},$$

ou

$$uv - 2au - 2cv = 0.$$

C'est une relation homographique; elle admet la solution $u = 0, v = 0$, parce que les points origines B, F, des deux divisions considérées, sont choisis de telle sorte que la droite qui les joint soit une des positions particulières de la droite mobile MP.

335. Théorème. *Lorsqu'une droite mobile Δ joint constamment les points correspondants de deux divisions homographiques situées sur deux droites non placées dans le même plan; Δ engendre, généralement, un hyperboloïde à une nappe.*

Cette proposition, qui est la réciproque de celle que nous venons de démontrer, résulte très simplement des considérations précédentes.

Reportons-nous encore à la figure (44), et soient AB et EF les deux droites fixes proposées. Une équation homographique entre deux variables u, v, étant de la forme

$$\alpha uv + \beta u + \gamma v + \delta = 0,$$

Si nous prenons pour origines des divisions deux points E F, auxquels correspondent une solution de cette équation, la constante δ disparaîtra et l'équation homographique sera, après ce changement des origines,

$$\alpha uv + \beta' u + \gamma' v = 0.$$

C'est ici qu'il convient de distinguer deux cas.

Dans le cas général, α n'est pas nul; c'est ce que nous supposerons d'abord, nous réservant d'examiner plus loin (§ 346) l'autre hypothèse.

Ainsi, en supposant $\alpha \neq 0$, l'équation précédente peut s'écrire

$$\text{(A)} \quad uv - 2au - 2cv = 0,$$

après avoir posé

$$-2a = \frac{\beta'}{\alpha}, \qquad -2c = \frac{\gamma'}{\alpha}.$$

Si nous prenons BA $= 2a$, EF $= 2c$, et si nous construisons le parallélipipède dont les arêtes sont EF, FB, et BA, nous pourrons chercher la surface engendrée par une droite Δ s'appuyant sur les trois droites fixes AB, CD, EF. Chacune des génératrices de cette surface détermine sur AB et sur EF deux points qui, d'après ce que nous avons montré au para-

graphe précédent, décrivent deux divisions homographiques donnant lieu, précisément, à l'équation (A).

Concluons donc que la droite Δ, décrit un hyperboloïde à une nappe.

336. Remarque. Il faut bien noter, en appliquant ce théorème, et nous avons insisté tout à l'heure sur ce point, que l'équation homographique proposée doit renfermer le terme en uv. Lorsque l'équation donnée ne contient pas ce terme, nous montrerons tout à l'heure que la surface engendrée est alors un paraboloïde hyperbolique.

337. Théorème. *Quatre génératrices d'un même système, rencontrent deux génératrices de systèmes différents, en deux couples de quatre points qui ont le même rapport anharmonique.*

Si nous prenons un point M, arbitrairement d'ailleurs, sur la quadrique, les plans $M\alpha\alpha'$, $M\beta\beta'$, $M\gamma\gamma'$, $M\delta\delta'$, se coupent

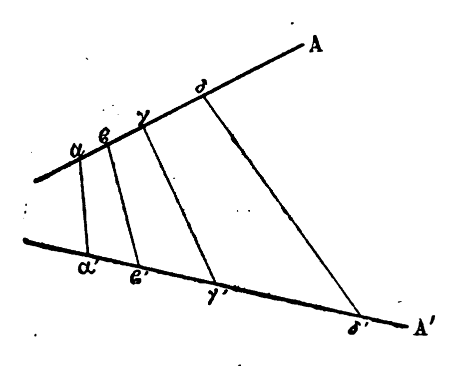


Fig. 45.

suivant une même droite, cette droite étant celle des deux génératrices qui, passant par M, est d'un système différent de celui auquel appartiennent les génératrices $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$. Il résulte de là que deux génératrices A, A' rencontrent celles-ci en quatre points qui peuvent être considérés comme appartenant à ces droites et à quatre plans passant par une droite commune. Les points $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, ont donc,

par une propriété élémentaire connue, le même rapport anharmonique.

338. Théorème. *Étant données deux droites fixes* A, A'; (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, *désignant des points fixes pris, respectivement, sur ces droites; si une droite mobile* $\delta\delta'$ *rencontre constamment deux droites fixes* A, A' *de telle sorte que le rapport anharmonique* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *soit toujours égal à celui des points* $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$; *la droite* $\delta\delta'$ *engendre, généralement, un hyperboloïde à une nappe.*

Soit,

$$\alpha\gamma = a, \qquad x\delta = u; \qquad \alpha'\gamma' = a', \qquad \alpha'\delta' = \iota';$$

l'égalité

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta'),$$

écrite sous la forme explicite, nous donne

$$\frac{\dfrac{\beta\alpha}{\beta\gamma}}{\dfrac{\delta\alpha}{\delta\gamma}} = \frac{\dfrac{\beta'\alpha'}{\beta'\gamma'}}{\dfrac{\delta'\alpha'}{\delta'\gamma'}}.$$

En posant

$$\frac{\beta\alpha}{\beta\gamma} : \frac{\beta'\alpha'}{\beta'\gamma'} = k,$$

nous avons

$$k\,\frac{v}{v - a'} = \frac{u}{u - a},$$

ou,

$$uv\,(k - 1) = - a'u + akv.$$

Les points δ, δ', décrivent donc sur A et A' deux divisions homographiques et nous avons montré (§ 335), que, dans cette hypothèse, $\delta\delta'$ engendrait un hyperboloïde à une nappe.

Nous nous supposons placés, bien entendu, dans le cas

général ; les points fixes (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, étant quelconques. Si $k = 1$, la conclusion précédente n'est plus exacte et nous allons montrer tout à l'heure (§ 345 et 346) que, dans ce cas particulier, la surface engendrée est un paraboloïde hyperbolique.

339. Remarque. Quatre droites prises au hasard, dans l'espace, ne sont pas situées, en général, sur le même hyperboloïde à une nappe. En effet, si l'on imagine les trois premières, il existe une hyperboloïde à une nappe passant par ces trois droites ; la quatrième droite rencontre cette surface en deux points, mais en général, n'est pas située sur elle. Le fait que quatre droites d'une figure géométrique de l'espace appartiennent au même hyperboloïde à une nappe, constitue donc une propriété de cette figure. Voici deux exemples remarquables de l'observation précédente.

340. Théorème. *Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe.*

Soit AA′ la hauteur qui correspond au point A ; par les arêtes AB, AC, AD, faisons passer des plans perpendiculaires, respectivement, sur les faces CAD, BAD, BAC. Nous savons que ces trois plans passent par une même droite $A\alpha$.

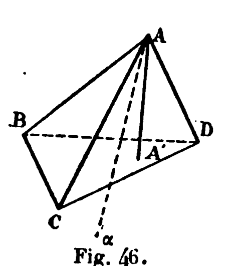


Fig. 46.

Cette remarque étant faite, observons que la perpendiculaire abaissée de B sur CAD est située nécessairement dans le plan $BA\alpha$; elle rencontre donc $A\alpha$; et comme la perpendiculaire AA′ abaissée sur la face BCD rencontre visiblement $A\alpha$, on peut dire que les quatre hauteurs du tétraèdre rencontrent la droite $A\alpha$.

Si nous concevons maintenant les droites analogues à $A\alpha$, les droites $B\beta$ et $C\gamma$, nous pouvons imaginer un hyperboloïde à une nappe passant par les trois droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; les quatre hauteurs du tétraèdre rencontrant ces trois droites sont donc quatre génératrices de cette quadrique.

La propriété énoncée se trouve ainsi établie ; elle est due à *Joachimsthal.*

341. Théorème. *On sait que des forces appliquées à un corps solide, peuvent, d'une infinité de façons, être réduites à deux ; si l'on considère deux réductions, les quatre forces correspondantes appartiennent à un même hyperboloïde à une nappe.* (CHASLES.)

Soient : U, V, le système correspondant à la première réduction ; U′, V′, celui qui a été obtenu par la seconde. Considérons maintenant deux forces U″, V″, égales et contraires aux forces U et V. Le corps solide proposé est en équilibre sous l'action des quatre forces U, V, U″, V″ ; ou, si l'on préfère, sous l'action des forces données, et sous celle de U″ et de V″.

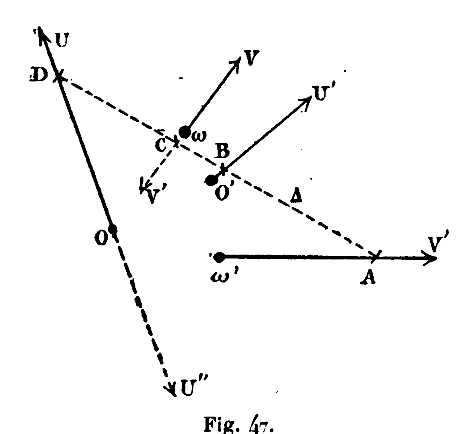


Fig. 47.

Remplaçons maintenant les forces données par les forces U′, V′ et nous pourrons dire encore que les forces U″, V″, U′, V′, laissent le corps en équilibre.

Imaginons alors une droite Δ rencontrant les trois droites U, U′, V′, chose possible ; et supposons qu'elle soit rendue fixe, ce qui, évidemment, ne détruit pas l'équilibre dont nous venons de parler. Si Δ ne rencontrait pas V, les trois forces U, U′, V′, étant détruites par la fixité donnée à Δ, nous pourrions considérer le corps comme soumis à l'action de la seule

force V ; il y aurait donc, nécessairement, rotation de ce corps autour de Δ. Ainsi Δ rencontre V, et en prenant deux autres droites Δ', Δ'', analogues à Δ, nous reconnaissons ainsi que les quatre forces U, V ; U', V' ; rencontrent les trois droites Δ, Δ', Δ'' ; elles appartiennent donc au même hyperboloïde à une nappe.

GÉNÉRATIONS DU PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE

342. Théorème. *La surface engendrée par une droite* G, *s'appuyant constamment sur trois droites fixes* Δ, Δ', Δ'', *parallèles à un même plan* P, *est une paraboloïde hyperbolique.*

Prenons Δ pour axe OX ; une position particulière de G, pour axe OZ ; et une parallèle à Δ' pour axe OY.

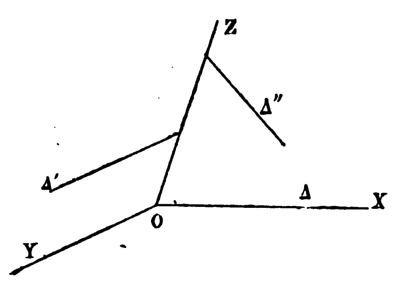


Fig. 48.

Dans ces conditions, les équations des droites données peuvent s'écrire :

$$(\Delta)\begin{cases} y=0, \\ z=0; \end{cases} \qquad (\Delta')\begin{cases} x=0, \\ z=h; \end{cases} \qquad (\Delta'')\begin{cases} y=mx, \\ z=h', \end{cases}$$

D'après une remarque déjà faite (p. 352), les équations de la droite G peuvent se représenter par les égalités :

$$y=\lambda z, \qquad z-h=\mu x.$$

La droite Δ'' rencontrant G, on a la condition

$$m(h'-h)=\lambda\mu h',$$

et le lieu décrit par G est la surface qui correspond à l'équation

$$m(h'-h)xz-h'y(z-h)=0.$$

Cette égalité représente une surface du second ordre; et, en prenant les dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y, on trouve les deux équations

$$m(h'-h)z=0, \qquad h'(z-h)=0,$$

qui sont visiblement incompatibles, h et h' étant différents de zéro.

En résumé, la quadrique trouvée admet des génératrices rectilignes non parallèles et n'a pas de centre; le paraboloïde hyperbolique est la seule surface du second ordre qui remplisse ces deux conditions.

348. Théorème. *Lorsqu'une droite* G *s'appuie constamment sur deux droites fixes* Δ, Δ', *en restant parallèle à un plan fixe* P, *elle engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Cet énoncé sous-entend qu'aucune des droites Δ, Δ' n'est

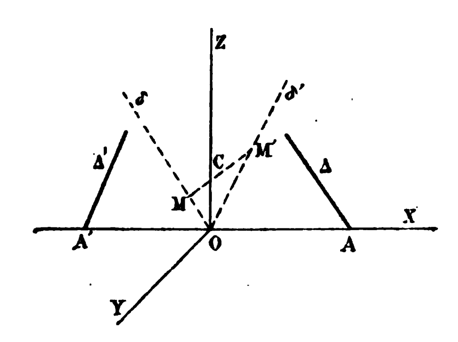


Fig. 49.

parallèle au plan donné P; soient A et A' les points communs à P et à ces droites. Prenons AA' pour axe des x; le point O, milieu

de AA′, pour origine ; par ce point O, menons aussi $O\delta$ et $O\delta'$ parallèles, respectivement, à Δ et à Δ' Le plan $\delta O\delta'$ coupe P suivant une droite que nous adoptons pour axe OY. Enfin si nous considérons, dans le plan $\delta O\delta'$, une droite MM′ parallèle à OY ; nous prendrons pour axe OZ la droite qui joint le point O au milieu de MM′. En d'autres termes, OZ est la droite conjuguée harmonique de OY par rapport au faisceau $O\delta$, $O\delta'$.

Dans ce système d'axes, les équations des droites Δ, Δ', en posant $OA = OA' = a$, sont :

$$(\Delta) \begin{cases} x = a, \\ y = mz; \end{cases} \qquad (\Delta') \begin{cases} x = -a, \\ y = -mz; \end{cases}$$

Les équations de (G) sont donc

$$y - mz + \lambda(x - a) = 0, \qquad y + mz + \mu(x + a) = 0.$$

Il nous reste à exprimer que G est parallèle au plan XOY. Or, en faisant $z = 0$ dans les équations précédentes, on a

$$y + \lambda(x - a) = 0, \qquad y + \mu(x + a) = 0,$$

et le point d'intersection de G et de P sera rejeté à l'infini, si l'on suppose

$$\lambda = \mu.$$

Le lieu d'écrit par G est donc la surface qui correspond à l'équation

$$(y - mz)(x + a) = (y + mz)(x - a).$$

Cette égalité, simplifiée, s'écrit

$$mzx = ay.$$

On vérifie que la quadrique correspondante : 1° n'a pas de centre à distance finie ; 2° admet des génératrices rectilignes non parallèles ; cette quadrique est donc un paraboloïde hyperbolique.

344. Théorème. *La surface engendrée par une droite* G, *rencontrant constamment deux droites fixes* Δ, Δ′, *et également inclinée sur celles-ci, est une paraboloïde hyperbolique.*

Prenons, quelque part, un point *o* ; et, par ce point, menons des droites *og*, *oδ*, *oδ′*, respectivement parallèles à G, a Δ, et Δ′. La droite *og* est inclinée d'angles égaux sur *oδ* et sur *oδ′* ; elle se projette donc sur le plan *δoδ′* suivant une droite *o*M

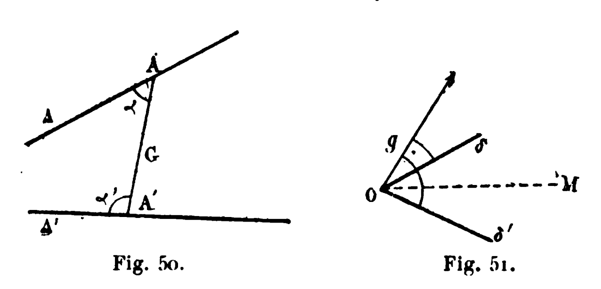


Fig. 50. Fig. 51.

qui, pour des raisons évidentes, est la bissectrice de l'angle *δoδ′*. Le plan *go*M a donc une position bien déterminée, quelle que soit la droite G considérée ; on peut donc envisager celle-ci comme une droite mobile, s'appuyant constamment sur deux droites fixes, en restant parallèles au plan fixe *go*M ; et il a été reconnu (§ 343) qu'une pareille droite engendrait un paraboloïde hyperbolique.

345. Théorème. *Lorsqu'une droite* M′N′, *rencontre constamment les côtés opposés d'un quadrilatère gauche* MNM″N *et partage ceux-ci dans le même rapport, cette droite engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Lorsque deux droites AB, CD, sont partagées aux points M, M′, M″; N, N′, N″ ; en parties proportionnelles, on sait que l'on peut mener par les droites MN, M′N′, M″N″, trois plans parallèles. Imaginons un plan P parallèle à ceux-ci : on peut dire alors que ces droites s'appuient sur AB et sur CD, en restant parallèles à P. Elles sont donc, en définitive, trois géneratrices d'un paraboloïde hyperbolique, engendré par une droite M′N′ rencontrant constamment AB, CD, en res-

tant parallèle à un plan fixe, celui-ci étant déterminé, quant à sa direction, par la condition d'être parallèle aux deux droites données MN, M″N″.

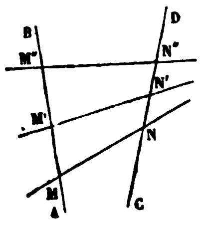


Fig. 52.

346. Remarque. On peut énoncer la propriété précédente dans une forme différente en disant : *lorsqu'une droite mobile* M′N′ *s'appuie constamment sur deux droites fixes, si les points communs décrivent sur ces droites deux divisions homographiques correspondant à l'équation*

$$(1) \quad \alpha u + \beta v + \gamma = 0,$$

M′N′ *engendre un paraboloïde hyperbolique.*

Soit M″N″ une position particulière de la génératrice M′N′, l'équation homographique (1) devant être vérifiée pour $u = 0$, $v = 0$, la constante γ est nulle, et l'équation se réduit à :

$$\alpha u + \beta v = 0.$$

Celle-ci admet la solution évidente

$$u = -\beta, \qquad v = \alpha.$$

Prenons

$$M''M = -\beta, \qquad N''N = \alpha;$$

comme nous avons, d'ailleurs,

$$M'M'' = u, \qquad N'N'' = v,$$

nous voyons donc que

$$\frac{M'M''}{MM''} = \frac{N'N''}{NN''}.$$

Ainsi les côtés opposés du quadrilatère gauche MNM″N″ sont partagés par la droite mobile M′N′ dans le même rapport et nous avons vu que, dans cette hypothèse, M′N′ engendrait un paraboloïde hyperbolique.

Cette proposition est la réciproque de la propriété 5, du paragraphe 329.

347. Théorème. *Les tangentes menées, parallèlement à un plan* P, *à une surface réglée, en tous les points d'une génératrice* Δ, *engendrent un paraboloïde hyperbolique.*

Soit Δ′ une génératrice voisine de Δ ; prenons sur Δ un point A et considérons la droite G qui : 1° passe par ce point,

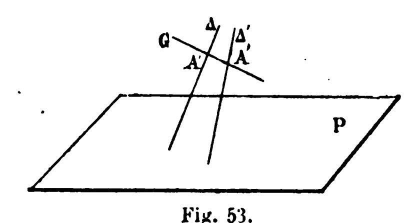


Fig. 53.

2° est parallèle à P, et 3° s'appuie sur Δ′. Toutes ces droites G qui correspondent aux différents points de Δ appartiennent au même paraboloïde hyperbolique. Si nous supposons maintenant que Δ′ soit mobile et viennne coïncider avec Δ, la droite AA′ a pour position limite celle d'une tangente à la surface considérée; la proposition énoncée se trouve donc établie.

EXERCICES

1. *Trouver le lieu des points qui sont à égale distance de deux droites données dans l'espace.*

Les axes de coordonnées étant ceux qui correspondent aux deux droites proposées, conformément à la règle donnée (Exc, 6 ; p. 70), on trouve que le lieu est représenté par l'équation

$$mxy + h(m^2 + 1)z = 0\,.$$

Le lieu cherché est un paraboloïde hyperbolique.

On peut généraliser cette question, en cherchant *le lieu des points* M *tels que le rapport de ses distances à deux droites fixes données soit constant.* (Examens oraux, 1884.) On discutera l'équation de la quadrique trouvée (qui n'est jamais un ellipsoïde) au moyen de l'équation en **S**, par la méthode développée dans la leçon suivante.

2. *On considère une ellipse* E *ayant pour axes* $2a$ *et* $2b$, *une droite* Δ *tangente à cette ellipse et un des foyers* F *; puis on suppose que, à chaque instant, on fasse tourner l'ellipse autour de* Δ *comme charnière, d'un angle* φ. *Le point* F *vient occuper dans l'espace une position* f *; trouver le lieu décrit par* f. (Reynaud et Duhamel.)

Ce lieu est, en général, une quartique gauche située sur un cylindre parabolique. L'origine étant au point F, l'axe focal étant pris pour axe des x et les axes étant rectangulaires, le lieu est représenté par l'ensemble des solutions communes aux deux équations :

$$x^2 + y^2 = m^2z^2,$$
$$x^2 + y^2 - \frac{4m^2}{m^2+1}cx = b^2\frac{4m^4}{(m^2+1)^2}\,.$$

3. *Démontrer que le lieu des points tels que la somme des carrés de leur distances à* n *plans fixes soit constante, est un ellipsoïde.*

4. *On considère des axes rectangulaires et sur* OX, *deux points fixes* A, A′, (OA $=$ OA′ $= a$) *; soit* U *une conique mobile, ayant ces points pour sommets et rencontrant constamment une droite* Δ *représentée par les équations:* ($z = h,\ x = my + na$). *Trouvé le lieu décrit par la conique* U. (Examens oraux, 1876.)

On remarqura que la projection de U sur YOX est une conique ayant pour axe AA′ et dont l'autre axe est dirigé suivant OY. En s'appuyant sur cette remarque, on arrive très simplement à l'équation:

$$\frac{x^2}{a^2} - \left(m\frac{y}{a} + n\frac{z}{h}\right)^2 + \frac{z^2}{h^2} = 1\,.$$

On cherchera les génératrices, les plans principaux, les plans cycliques et l'ellipse de gorge de cet hyperboloïde, dont l'un des axes est égal à a.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON

DISCUSSION DES SURFACES

348. Le problème que nous allons résoudre dans cette dernière leçon peut se définir ainsi : *étant donnée une équation du second degré à trois variables, trouver quelle est la nature, ou l'espèce, de la quadrique qui lui correspond.*

Il existe bien des méthodes pour répondre au problème que nous venons de nous poser; mais, parmi elles, il y en a deux qui nous paraissent devoir être tout particulièrement distinguées; l'une, *la méthode par la décomposition en carrés*, à cause de la grande facilité que présente son application; l'autre, plus difficile, plus longue, mais conduisant plus loin que la précédente et pénétrant plus profondément dans la question. Cette seconde méthode qui permet, dans un grand nombre de cas, de donner les dimensions mêmes de la surface, est dite *méthode par l'équation en* **S**.

Pour bien marquer l'importance qui s'attache à ces deux méthodes, nous les nommerons **méthodes générales**, et nous appellerons **méthodes auxiliaires** celles que nous exposerons plus loin, méthodes ordinairement moins pratiques, mais qu'il faut connaître parce qu'elles s'appliquent très heureusement à certains exemples particuliers.

349. Première méthode générale. (*Décomposition en carrés.*) L'idée de cette méthode, dont le principe est dû à **Plücker,** a déjà été donnée (Leç. 11). Nous résumerons en quelques mots la marche qu'il faut suivre quand on veut appliquer ce genre de discussion.

L'équation de la surface étant

$$f(x, y, z, t) = 0,$$

f représente une forme quadratique des lettres (x, y, z, t) et, dans cette expression, la forme φ ne peut pas être identiquement nulle. On pourra donc appliquer à f les procédés de calcul que nous avons indiqués en algèbre pour décomposer en carrés les formes quadratiques, mais en observant que la lettre t n'est pas choisie comme lettre ordonnatrice, chose possible, puisque, encore une fois, φ n'est pas identiquement nul.

La méthode de décomposition en carrés, que nous avons nommée (*Alg.*, § 342) *méthode par réduction*, conduit ainsi, pour f, à une certaine forme algébrique ; et, de cette forme, en appliquant les résultats déjà signalés (Leç. 11), on déduit le genre et l'espèce de quadrique qui correspond à l'équation proposée.

350. Deuxième méthode générale. (*Méthode par l'équation en* S.) L'équation en S, comme nous l'avons vu (§ 191), n'a jamais ses trois racines nulles; mais elle peut, suivant les cas, avoir ses trois racines différentes de zéro, ou posséder soit une racine nulle, soit deux racines nulles.

De là trois cas que nous distinguerons :

1° *L'équation en* S *n'a aucune racine nulle*. En désignant par S', S'', S''', les trois racines de l'équation en S, on sait que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$\text{(A)} \quad S'x^2 + S''y^2 + S'''z^2 + \frac{H}{\Delta} = 0.$$

On imagine alors le tableau suivant :

$$S', \quad S'', \quad S''', \quad \frac{H}{\Delta}.$$

L'équation en S ayant ses racines réelles, un des corollaires du théorème de Descartes (*Alg.*, § 485) nous apprend

que le nombre des racines positives de cette équation est précisément égal au nombre des variations de son premier membre.

D'après cette remarque, et sans qu'il soit nécessaire de calculer les racines de l'équation en S, on pourra connaître le nombre des variations du tableau (1), quand on aura forme $\Delta(S)$.

On comprend alors comment la connaissance des signes des coefficients de l'équation (A) entraîne la détermination de l'espèce de quadrique qu'elle représente.

2° *L'équation en* S *a une seule racine nulle.* La surface est un paraboloïde ou un cylindre ; suivant que H est différent de zéro, ou égal à zéro. Le paraboloïde peut être elliptique ou hyperbolique, de même que le cylindre. On distingue ces deux cas au moyen du signe des racines de l'équation en S, débarrassée de la racine nulle.

Dans le cas où $H = 0$, la surface étant un cylindre, une section plane (celle qu'on obtient en faisant $x = 0$, par exemple) suffit pour distinguer quel est le genre de cylindre qui correspond à l'équation proposée. Pourtant, si, en coupant par un plan, on obtenait deux droites parallèles, on devrait avoir recours à une seconde section faite par un autre plan, non parallèle au précédent.

3° *L'équation en* S *a deux racines nulles.* La surface est un cylindre parabolique, ou un système de deux plans parallèles. Une section plane (ou deux sections planes faites par des plans non parallèles, quand la première donne deux droites parallèles), permettra de dire quelle est la surface proposée.

MÉTHODES AUXILIAIRES

351. Méthode par le centre, les diamètres et les sections planes. La discussion que nous avons faite précédem-

ment (lec. 10) permet de dire d'abord à quelle classe appartient la surface qui correspond à l'équation proposée. Il reste ensuite, la classe étant déterminée, à trouver quelle est l'espèce de la quadrique

1° Supposons d'abord que nous soyons placés dans le cas de la première classe.

Transportons les axes, parallèlement à eux-mêmes, au centre de la surface et considérons : 1° la section faite par le plan XOY ; 2° les points d'intersection R, R′, de la surface par la droite Δ, conjuguée de ce plan. De la nature de la section qui est une ellipse ou une hyperbole, et de la réalité, ou de la non-réalité des points R et R′, nous pouvons déduire quels seraient les signes des coefficients a, a', a'', dans l'égalité

$$aX^2 + a'Y^2 + a''Z^2 = 1,$$

équation qui représenterait la quadrique proposée, rapportée à trois diamètres conjugués. Nous pourrons donc, d'après ces considérations, décider quelle est l'espèce de la suface qui correspond à l'équation donnée.

2° Dans les surfaces de la seconde classe, les sections faites par les plans de coordonnées ne pouvant pas donner trois paraboles (§ 320 et 321) une de ces sections sera certainement une ellipse ou une hyperbole. On saura donc si l'on est en présence d'un paraboloïde elliptique, ou d'un paraboloïde hyperbolique.

3° Lorsqu'on trouve une ligne de centres, le cylindre qui correspond à l'équation donnée peut être elliptique ou hyperbolique; il peut aussi être aplati, c'est-à-dire formé par deux plans sécants réels ou imaginaires. Les sections par les plans de coordonnées permettent de différencier ces espèces diverses.

4° Si la ligne des centres est rejetée à l'infini, la surface est un cylindre parabolique.

5° Enfin, s'il y a un plan de centres, l'équation proposée représente deux plans parallèles.

352. Méthode par les génératrices. Au point de vue

des génératrices, les quadriques se séparent nettement en deux familles : la première est formée des surfaces qui n'ont pas de droites réelles ; l'autre est constituée par celles qui admettent des génératrices rectilignes.

Dans le premier cas, la quadrique proposée peut être l'une ou l'autre des surfaces suivantes :

Quadriques non réglées.
- *Ellipsoïde,*
- *Hyperboloïde à deux nappes,*
- *Paraboloïde elliptique.*

Dans le second cas, on est en présence d'une quadrique faisant partie du tableau suivant :

Quadriques réglées.......
- *Hyperboloïde à une nappe,*
- *Paraboloïde hyperbolique,*
- *Cône,*
- *Cylindre*
  - *elliptique,*
  - *hyperbolique,*
  - *parabolique,*
- *Plants sécants,*
- *Plans parallèles.*

1° Dans la première famille, si l'on peut mettre en évidence certaines sections planes, par exemple une hyperbole; on pourra dire que la surface est un hyperboloïde à deux nappes. Si la section est elliptique, quelle que soit la direction du plan sécant, la surface proposée est un ellipsoïde. Enfin, si l'on trouve des sections elliptiques et paraboliques et si l'on reconnaît l'impossibilité des sections hyperboliques, la surface est un paraboloïde elliptique.

2° Dans la seconde famille, on distingue les espèces de la manière suivante :

Soit Δ une génératrice de la quadrique donnée Q. Cherchons à placer sur Q une droite Δ' parallèle à Δ; différents cas se présentent dans la solution de ce problème.

1° Il y a une seule solution à distance finie, distincte de Δ; la surface est un hyperboloïde à une nappe.

2° Il y a une solution rejetée à l'infini; l'équation représente un paraboloïde hyperbolique.

3° Il y a une solution qui se confond avec Δ; la quadrique considérée est un cône.

4° Il y a une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, la surface est un cylindre ou une variété de cylindre, variété formée par deux plans, sécants ou parallèles. Pour distinguer ces différentes surfaces, on effectue une section par un plan arbitraire; la courbe du second ordre que l'on obtient ainsi est une véritable conique, ou une variété. Dans tous les cas, cette section caractérise la surface; mais, dans le cas où la section obtenue est constituée par deux droites parallèles, il faut, pour conclure, que le plan sécant soit, comme nous l'avons dit, *arbitraire*.

353. Contour apparent. Si l'on considère un plan P et des droites Δ qui se meuvent, parallèlement à elles-mêmes en restant tangentes à une quadrique Q, le lieu décrit par les traces des droites Δ sur P, s'appelle le contour apparent de Q, sur ce plan, relativement à la direction des droites Δ.

Prenons les équations de Δ sous la forme

$$\frac{X-x}{\alpha}=\frac{Y-y}{6}=\frac{Z-z}{\gamma}=\rho,$$

La détermination de l'intersection de Δ et de Q dépend de l'équation

$$\rho^2\varphi(\alpha, 6, \gamma)+\rho(\alpha f_x'+6f_y'+\gamma f_z')+f(x, y, z)=0.$$

En exprimant que Δ rencontre Q en deux points coïncidents on a

$$(\alpha f_x'+6f_y'+\gamma f_z')^2=4f(x, y, z)\,\varphi(\alpha, 6, \gamma).$$

Cette équation a été déjà signalée (§ 98); elle représente, comme nous le savons, le cylindre circonscrit à Q, et dont les génératrices sont parallèles à Δ. L'intersection de ce cylindre et du plan donné P fait connaître le contour apparent cherché.

En déterminant le contour apparent de la quadrique sur

les plans de coordonnées, on obtient ainsi des courbes qui peuvent aider, dans quelques cas, à fixer le genre de la surface proposée.

Par exemple, deux contours apparents elliptiques, sur deux plans non parallèles, ne peuvent provenir que d'un ellipsoïde; un contour apparent formé par deux droites sécantes est caractéristique des surfaces coniques; etc...

Nous allons maintenant montrer, sur deux exemples, l'application des méthodes précédentes.

354. Problème I. *Trouver quelle est la surface représentée par l'équation*

$$(1)\quad (b^2+c^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2-2bcyz-2aczx$$
$$-2abxy=d^2(a^2+b^2+c^2).$$

(Concours académique de Poitiers, 1876.)

1° La méthode par la décomposition en carrés conduit à écrire l'équation proposée sous la forme :

$$\left\{x\sqrt{b^2+c^2}-a\frac{by+cz}{\sqrt{b^2+c^2}}\right\}^2+(a^2+b^2+c^2)(cy-bz)^2$$
$$=d^2(a^2+b^2+c^2).$$

On voit ainsi que la surface est un cylindre elliptique et que les génératrices de ce cylindre sont parallèles à la droite qui correspond aux équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

On peut encore employer la méthode précédente en observant que l'équation proposée peut s'écrire [1]

$$u^2+v^2+w^2=d^2(a^2+b^2+c^2),$$

après avoir posé

$$u=cy-bz,\qquad v=az-cx,\qquad w=bx-ay.$$

Mais les formes u, v, w, obtenues par ce groupement, ne sont pas indépendantes, et l'on a

$$au+bv+cw=0.$$

1. V. Leç. 9; ex. 4.

Un autre groupement se présente aussi, assez naturellement, en observant que l'équation (1) peut s'écrire

$$(x^2+y^2+z^2-d^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2.$$

Sous cette forme on reconnaît que le cylindre donné est de révolution et qu'il est circonscrit à une sphère de rayon d, ayant son centre à l'origine des coordonnées.

2° On arrive au même résultat, et par une voie plus méthodique, en appliquant l'équation en $\mathbf{S}$, à l'exercice proposé.

Le calcul prouve d'abord que Δ est nul ; l'équation en $\mathbf{S}$ admet une racine nulle et les deux autres sont données par l'équation

$$\mathbf{S}^2-2\mathbf{S}(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)^2=0.$$

On a donc, dans cet exemple,

$$\mathbf{S}'''=0, \quad \text{et} \quad \mathbf{S}'=\mathbf{S}''=a^2+b^2+c^2.$$

Ainsi, l'équation réduite de la surface proposée est

$$X^2+Y^2=d^2,$$

et l'on aboutit à la conclusion déjà obtenue.

355. Problème II. *Quelles sont les diverses surfaces qui peuvent être représentées par l'équation :*

$$(1) \quad ax^2+ay^2+bz^2+2\alpha yz+2\alpha zx-2axy=1.$$

1° Si l'on observe que cette équation peut s'écrire

$$a(x-y)^2+z(bz+2\alpha y+2\alpha x)=1.$$

ou, dans la notation abrégée,

$$aU^2+VW=1.$$

U, V, W, sont, dans le cas général, des fonctions indépendantes ;

on forme alors, immédiatement, le tableau suivant :

$a > 0$, $\alpha \gtrless 0$, *Hyperboloïde à une nappe.*

$a = 0$, $\alpha \gtrless 0$, *Cylindre hyperbolique.*

$a = 0$, $\alpha = 0$, *Deux plans parallèles.*

$a < 0$, $\alpha \gtrless 0$, *Hyperboloïdes à deux nappes.*

$a \gtrless 0$, $\alpha = 0$, $b \gtrless 0$, $\begin{cases} ab > 0, & \textit{Cylindre elliptique.} \\ ab < 0, & \textit{Cylindre hyperbolique.} \end{cases}$

$a \gtrless 0$, $\alpha = 0$, $b = 0$, *Deux plans coïncidents.*

2° Avant d'appliquer à l'équation (1) la méthode par l'équation en **S**, nous ferons, à propos de l'exercice qui nous occupe, une observation qui trouve son application dans un grand nombre de cas et qui, pour ce motif, nous paraît importante.

Nous avons avancé précédemment (§ 348), que la méthode, dite par l'équation en **S**, était supérieure à toutes les autres, lorsqu'on voulait faire une étude un peu approfondie de l'équation proposée, parce qu'elle permettait de trouver ce que nous avons appelé les dimensions de la surface; c'est-à-dire la grandeur de ses axes.

Malheureusement, l'équation en **S** est du troisième degré; ses trois racines étant réelles, elle appartient au cas que nous avons nommé, en algèbre, cas irréductible ; et, pour ce motif, on ne peut pas, *en général*, résoudre l'équation en **S**.

Mais cette résolution devient possible lorsque l'équation en **S** est *quadratique*, c'est-à-dire lorsqu'elle est décomposable en deux facteurs rationnels.

Le dernier terme de l'équation en **S** étant le discriminant Δ de la forme φ, on voit que la résolution de l'équation en **S** est possible, quadratiquement, pour les surfaces des quatre dernières classes.

La difficulté subsiste uniquement pour les surfaces de la première classe ($\Delta \gtrless 0$) et, pour ces quadriques, elle est, en général, insurmontable. Ce n'est plus que dans des cas parti-

culiers qu'elle peut être tournée et, nous voulons signaler ici ceux d'entre eux que l'on rencontre le plus ordinairement.

Lorsque la quadrique est de révolution, l'équation en $\mathbf{S}$ admet deux racines égales ; elle se décompose donc en facteurs rationnels du premier degré.

Mais voici un autre cas, moins particulier, où l'équation en $\mathbf{S}$ est encore quadratique ; c'est *le cas où deux des nombres de Jacobi sont égaux*. Nous avons montré (§ 193) que, dans cette hypothèse, l'équation en $\mathbf{S}$ se décomposait rationnellement en deux facteurs. On devra donc toujours, avant d'appliquer la méthode par l'équation en $\mathbf{S}$, calculer les nombres de Jacobi et si, parmi eux, il s'en trouve deux qui soient égaux à une certaine quantité α, on peut affirmer que α est une racine de l'équation en $\mathbf{S}$. Ayant ainsi prévu le facteur $\mathbf{S} - \alpha$, dans le premier membre de l'équation, on effectue immédiatement une décomposition qui serait, le plus souvent, difficile à reconnaître sans cette remarque, heureuse conséquence de la méthode de Jacobi.

Revenons maintenant à l'équation (1), et proposons-nous de lui appliquer la méthode de l'équation en $\mathbf{S}$. Les nombres de Jacobi étant

$$A - \frac{B'B''}{B}, \qquad A' - \frac{BB''}{B'}, \qquad A'' - \frac{BB'}{B''},$$

on voit qu'en supposant

$$B = B', \quad \text{et} \quad A = A',$$

il y a, dans la suite précédente, deux nombres égaux. D'après cela, et conformément à la remarque que nous venons de développer, on peut être certain, avant tout calcul, que le premier membre de l'équation en $\mathbf{S}$ qui correspond à (1), admet le facteur $\mathbf{S} - 2a$.

On trouve, en effet :

$$\mathbf{S}^3 - (2a + b)\mathbf{S}^2 + 2(ab - x^2)\mathbf{S} + 4ax^2 = 0$$

ou

$$(\mathbf{S} - 2a)(\mathbf{S}^2 - b\mathbf{S} - 2x^2) = 0.$$

Les trois racines de l'équation en $\mathbf{S}$ sont donc

$$2a, \qquad \frac{b+\sqrt{b^2+8\alpha^2}}{2}, \qquad \frac{b-\sqrt{b^2+8\alpha^2}}{2}.$$

La seconde racine a le signe $+$, la troisième le signe $-$; quant au signe de la première racine, il est le même que celui de a. On a donc un hyperboloïde à une nappe ou à deux nappes, suivant que a est positif ou négatif.

Nous avons raisonné dans le cas général et en supposant $a.\alpha \neq 0$. Lorsqu'on suppose $a.\alpha = 0$, l'équation en $\mathbf{S}$ admet une racine nulle et en examinant, successivement, les hypothèses: 1° $a = 0$; 2° $d = 0$; 3° $a = 0$, et $\alpha = 0$; on retrouve les résultats que nous avons déjà signalés, en discutant l'équation (1), par la méthode de la décomposition en carrés.

EXERCICES

1. *Désignant par x, y, z, des coordonnées rectangulaires et par m un paramètre variable, on demande de déterminer les diverses surfaces que peut représenter l'équation*

$$x^2+(2m^2+1)(y^2+z^2)-2(zy+zx+xy)=2m^2-3m+1,$$

lorsque le paramètre m varie de $-\infty$ à $+\infty$.

(Ecole Polytechnique, 1858.)

On peut appliquer à cette équation la remarque que nous avons faite tout à l'heure et on prévoit ainsi, *à priori*, une racine égale à $2(m^2+1)$.

L'équation en $\mathbf{S}$ est

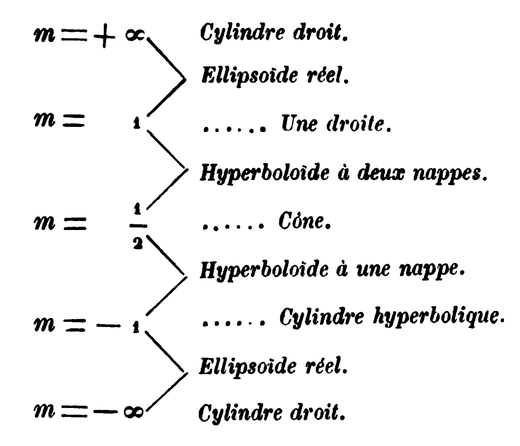
$$\mathbf{S}^3-(4m^2+3)\mathbf{S}^2+4m^2(m^2+2)\mathbf{S}-4(m^4-1)=0, \quad [1]$$

ou

$$(\mathbf{S}-2m^2-2)\left[\mathbf{S}^2-(2m^2+1)\mathbf{S}+2(m^2-1)\right]=0.$$

1 Nous avons indiqué en algèbre (p. 168; § 172) une méthode pour résoudre cette équation, et d'autres équations analogues, sans connaître le résultat qui a été prévu ici par des considérations d'un ordre tout particulier.

Le tableau suivant résume la discussion.



2. *Quelles sont les surfaces représentées par l'équation*

$$(1) \quad a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1.$$

(Ecole Polytechnique, 1861.)

L'équation en $\mathbf{S}$ est

$$(2) \quad \mathbf{S}^3 - (a+b+c)\mathbf{S}^2 + (ab + ac + bc - a^2 - b^2 - c^2)\mathbf{S} + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0.$$

En observant (Alg., § 1) que l'on a

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

et, en posant :

$$a + b + c = p, \qquad a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = q,$$

l'équation (2) s'écrit :

$$\mathbf{S}^3 - p\mathbf{S}^2 - q\mathbf{S} + pq = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît que cette équation est quadratique et qu'elle peut s'écrire

$$(\mathbf{S} - p)(\mathbf{S}^2 - q) = 0.$$

La fonction q est toujours positive ou nulle, parce qu'elle est une somme de trois carrés (Alg., § 1), mais s'il nous fallait une preuve de cette propriété de la fonction q, elle résulterait de ce fait que l'équation en $\mathbf{S}$ a toujours ses racines réelles.

Si q est nul, on a $a = b = c$, l'équation (1) représente deux plans parallèles.

Si, au contraire, on suppose $q \neq 0$, on a le tableau suivant:

$p > 0$, . . . *Hyperboloïde à une nappe.*
$p = 0$, . . . *Cylindre hyperbolique équilatère.*
$p < 0$, . . . *Hyperboloïde à deux nappes.*

3. Discuter les surfaces d'espèces différentes qui sont représentées par les équations suivantes:

$$1^\circ \quad b^2(x^2+z^2)+c^2(x^2+y^2)-2a^2yz=1.$$
$$2^\circ \quad a^2(y^2+z^2)+b^2(x^2+z^2)+2abxy=d^2(a^2+b^2).$$

4. *Trouver les dimensions de l'ellipsoïde qui correspond à l'équation:*

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{a^2+b^2}{abc}z\right)^2+\left(\frac{x}{b}-\frac{y}{a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{cz}{ab}\right)^2=1.$$

Examiner le cas où l'on suppose

$$c^2=a^2+b^2.$$

QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ÉCRITS (1)

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

1837. Construire les courbes qui correspondent aux équations

1° $y = \pm\sqrt{\dfrac{x^2 - 24x + 8}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}}$.

2° $y = \dfrac{1 - 2x + x^2}{x^3 + 9x - 9}$.

3° $x^2y^2 + x^3y - x^2y + 2 = 0$.

4° $y = \pm\sqrt{\dfrac{1 - 3x + x^2}{x^3 + 5x - 5}}$.

5° $y^2x^2 + 1 = 2xy + x^2 - x$.

6° $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 3x - 2}$.

7° $y = \dfrac{x^3 - 2x - 2}{1 - x^4}$,

déterminer, à moins de $\frac{1}{10}$ près, l'abcisse du point où cette courbe coupe l'axe des x.

1. Les sources que nous avons consultées pour établir ces tableaux sont :

Reynaud et Duhamel. *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques.* (Bachelier, 1823.)

P.-H. Blanchet. *Compléments de Mathématiques spéciales.* (Hachette, 1838.)

Corneille. *Recueil de sujets de compositions donnés au concours de l'agrégation* (Hachette, 1876)

Painvin. *Principes de la Géométrie analytique.* 1866-1870.

Enfin, les *Nouvelles Annales de Mathématiques* et le *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales.*

8° Construire les courbes :

$$y^2 - x = 0, \quad \text{et} \quad x^2 - xy - y^3 = 0\,;$$

déterminer, à moins de $\frac{1}{10}$ près, les coordonnées des points d'intersection.

1842. 1. Soit P un point fixe dans le plan d'une ellipse donnée ; PCD une sécante quelconque rencontrant l'ellipse aux points C et D. Soit C′D′ le diamètre parallèle à CD ; sur la sécante CD on prend un point M tel que l'on ait

$$PM \cdot CD = \overline{C'D'}^2.$$

trouver le lieu du point M.

2. On prend deux points fixes P, Q sur la base d'un triangle, par ces points, on mène deux droites rencontrant, respectivement, CA et CB en des points A′, et B′, tels que l'on ait

$$\alpha \frac{CA'}{AA'} + 6 \frac{CB'}{BB'} = 1,$$

α, 6, étant des constantes, trouver le lieu dès intersections des droites PA′ et QB′.

1844. Une corde, dans une conique, est vue d'un foyer sous un angle constant, trouver le lieu décrit par le pôle de cette corde.

1845. 1. Lieu des foyers des hyperboles ayant un sommet commun et une asymptote commune.

2. On donne un angle droit XOY ; soit A un point de OX, B un point de OY ; trouver le lieu d'un point M sachant que l'on a

$$MBY = 2MAX.$$

3. Soit XOY un angle donné et d'ailleurs quelconque, et soit A un point fixe de son plan ; par A on mène des transversales mobiles qui rencontrent les côtés de l'angle XOY aux points B et C. Sur chacune de ces sécantes on prend un point M tel que l'on ait

$$\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n},$$

m, n, étant des lignes données. On demande le lieu du point M.

4. On joint un point M, mobile sur une ellipse, à des foyers F, F′; ces droites rencontrent respectivement la courbe en des points P et Q ; démontrer que l'on a

$$\frac{MF}{FP} + \frac{MF'}{F'Q} = C^{te}.$$

5. Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = \frac{1 - \sin\omega}{1 + \cos\omega}.$$

6. D'un point B pris sur le côté d'un angle YOX, angle donné et quelconque, on mène une tangente à chacun des cercles inscrits dans cet angle ; on demande le lieu des points de contact.

7. Des extrémités M, M', d'une corde mobile MM' passant par le foyer F d'une parabole on abaisse des perpendiculaires MP, M'P', sur une droite fixe située dans le plan de la parabole ; démontrer que

$$\frac{MP}{MF} + \frac{M'P'}{M'F'} = C^{te}.$$

8. Trouver le lieu des milieux des cordes égales d'une ellipse donnée.

9. Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$y = \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

10. A une suite d'ellipses ayant leurs foyers communs, on mène des tangentes parallèles à une droite donnée ; trouver le lieu des points de contact,

1846 1. Lieu des points tels que leurs polaires relatives à trois cercles concourent en un même point.

2. Construire la courbe qui a pour équation

$$\rho = \frac{\cos\omega - \sin\omega}{(\cos\omega + \sin\omega)^2}.$$

3. Trouver le lieu des points qui divisent en moyenne et extrême raison les cordes d'une ellipse qui passent par un point fixe.

4. Une ellipse et une parabole ont un foyer commun F et l'axe qui correspond à ce foyer est aussi commun à ces deux courbes. Soit MP un diamètre quelconque de l'ellipse, les droites FM et FP rencontrent la parabole, respectivement, aux points M' et P' ; démontrer que

$$\frac{FM}{FM'} + \frac{FP}{FP'} = C^{te}.$$

5. On considère un cercle Δ et deux points fixes, A et B ; le point A étant situé sur la circonférence proposée. Par le point B on mène une transversale qui rencontre Δ aux points C et D. Les tangentes en ces points se coupent en un certain point I, et l'on joint IB. Démontrer que

$$\text{tang IBA} \cdot \text{tang CBA} = C^{te}.$$

6. Une ellipse et une hyperbole ont un axe commun; on mène des sécantes parallèles ; trouver le lieu des milieux des segments compris entre l'ellipse et l'hyperbole.

1847. 1. Discuter la courbe qui a pour équation

$$x^m + y^m = a^m.$$

2. Construire la courbe qui correspond à l'équation

$$\rho = a \sin \omega \cos \omega .$$

3 et 4. Discuter les courbes représentatives des fonctions.

$$y = a \operatorname{tang}\left[\frac{x}{b}\right], \quad \text{et} \quad y = x + a \sin\left[\frac{x}{b}\right].$$

5. Du sommet A de l'angle droit BAC on mène une droite mobile ; des points B et C on abaisse sur cette droite des perpendiculaires BP, CQ ; trouver le lieu des points M de ces droites pour lesquels $AM^2 = AP.AQ$.

6. 1° Trouver la longueur d'une corde divisant la surface d'un cercle dans un rapport donné; construire l'expression. 2° Courbe représentative de l'équation

$$y = \frac{a}{\sin\left[\frac{x}{b}\right]}.$$

7. 1° Construire les courbes qui correspondent aux équations

$$\rho = a - b\omega, \qquad \rho = \frac{a}{\omega - b}.$$

2° Podaire d'une conique, le pôle étant un sommet de la courbe.

1848. 1. On donne une droite Δ et sur cette droite un point O. Soient A et B deux points fixes, non situés sur Δ ; trouver le lieu d'un point M, sachant que les droites MA et MB rencontrent Δ en des points C, D, tels que l'on ait

$$OC.OD = C^{te}.$$

2. Lieu des foyers des paraboles de forme invariable, inscrites dans un angle droit donné.

3. Podaire de l'ellipse, le pôle étant un sommet.

4. Équation polaire de la transformée de la section plane d'un cône droit, quand on développe le cône.

5. Lieu des sommets des triangles semblables à un triangle donné, la base

de ce triangle passant par un point fixe et s'appuyant constamment sur deux droites données.

6. 1° Déterminer les dimensions d'un cône droit, connaissant son volume et l'aire de la surface convexe.

2° Résoudre l'équation

$$x^4 + 20x^3 - 742x^2 - 8660x - 22875 = 0.$$

1849. 1. Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote commune et un foyer commun.

2. Diviser une demi-sphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.

3. Une ellipse donnée tourne autour de son centre; trouver le lieu des intersections de son axe focal avec une tangente à cette ellipse, tangente qui reste parallèle à une droite fixe.

4. Démontrer que les polaires d'un point fixe, par rapport à toutes les coniques passant par quatre points donnés, se coupent au même point.

5. Par le point D, point commun à la directrice d'une parabole P et à l'axe DX, de cette courbe, on mène une transversale mobile qui rencontre P aux points M, M'; trouver le rapport des angles DFM, XFM'; F désignant le foyer de P.

6. Podaire du sommet de la parabole.

7. Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et une directrice communes.

8. Soit un angle ABC; B désignant le sommet de cet angle, A un point fixe sur l'un de ses côtés, C un autre point fixe pris sur l'autre côté. Par B on mène une transversale mobile sur laquelle on abaisse des perpendiculaires AA', CC'. Trouver le lieu décrit par le milieu de A'C'.

1851. 1. Appliquer la méthode d'approximation de Newton à l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

2. Construire la courbe dont l'équation est :

$$y^3 = x^4 - 10x^2 + 9.$$

3. Décomposer, en fractions simples,

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2(x+1)}.$$

1855. 1. On donne l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3,$$

trouver les droites situées sur la surface qui correspond à cette équation, puis étudier les sections faites dans cette surface par les plans qui passent par l'une des droites trouvées.

2. Démontrer que l'équation

$$x = \tang x,$$

admet une infinité de racines et calculer, avec une certaine approximation, la plus petite d'entre elles.

3. Trouver les points communs à une ellipse et à une hyperbole dont les centres sont, respectivement, O et O' : sachant que ces courbes ont un foyer commun F.

On donne : $OFO' = \alpha$, et les demi-axes a, b de l'ellipse, a', b' de l'hyperbole. Faire le calcul en supposant

$$\alpha = 22°30'; \quad a = 10, \quad b = 7; \quad a' = b' = 1.$$

1856. Discuter l'équation

$$\rho^2 = a + b \sin\omega + c \sin^2\omega,$$

et faire la classification des différentes courbes qu'elle représente quand on fait varier les paramètres a, b, c.

1857. Trouver le nombre des racines réelles admises par l'équation

$$x = a \sin x + b;$$

pour chaque valeur des coefficients a, b, effectuer la séparation de toutes ses racines. Appliquer la méthode à l'équation

$$x = 3142 \sin x + 157.$$

1858. V. leç. 29; ex. 1.

1859. La corde AB d'un cercle partage la surface de ce cercle en deux segments tels que le plus grand est moyen proportionnel entre le plus petit et le cercle entier Calculer à $\frac{1}{10}$ de seconde près le plus petit des deux arcs sous-tendus par AB.

1860. On donne une parabole P; soient A et B deux points mobiles sur cette courbe, mais tellement choisis que les normales en A et B se coupent en un point C, situé sur P. La tangente en C et la droite AB se coupent en un point M; trouver le lieu décrit par ce point et construire la courbe.

1861. V. leç. 29; ex. 2.

1862. Trouver le lieu des centres des surfaces représentées par l'équation

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2pxz + 2qyz - 2ax - 2by + 2cz = 0,$$

(a, b, c, étant des nombres positifs donnés; p, q représentant des paramètres variables) : 1° Lorsque p et q varient de toutes les manières pos-

sibles; 2° lorsque p et q varient de manière à ce que l'équation donnée représente un cône. Distinguer la partie du lieu qui correspond à des hyperboloïdes à une nappe, de celle qui correspond à des hyperboloïdes à deux nappes.

1863. On donne sur un plan deux circonférences O, O'; d'un point A, pris sur O, on mène des tangentes à O' et l'on joint les points de contact obtenus. Cette droite coupe la tangente à O, au point A, en M; trouver le lieu décrit par M.

Examiner les différentes formes de ce lieu selon la grandeur et la position relatives des circonférences O et O'; indiquer le cas où il se décompose. Faire voir que le lieu des points M est tangent à O en chacun des points qui lui sont communs avec cette circonférence.

1864. On considère le cercle qui a pour équation

$$x^2+y^2=1,$$

et la parabole qui est représentée par l'équation

$$(\beta x-\alpha y)^2+2\alpha x+2\beta y=\frac{3\alpha^2+\beta^2-1}{\alpha^2},$$

où α et β désignent des paramètres positifs quelconques. On propose de déterminer :

1° Le nombre des points réels communs aux deux courbes, pour les différentes valeurs de α et de β.

2° Les coordonnées des quatre points communs quand on suppose :

$$\alpha^2+\beta^2=1,$$

ou :

$$\alpha=1 \quad \text{et} \quad \beta>0,$$

enfin, lorsque l'on a

$$\beta=\sqrt{(\alpha^2-1)(4\alpha^2-1)}.$$

1865. On donne dans un plan une parabole P et l'on considère une circonférence C passant par le foyer de P. On propose d'indiquer les régions du plan où doit se trouver le centre de C, pour que cette circonférence ait successivement avec P : 1° quatre points réels, 2° quatre points imaginaires, 3° deux points réels et deux points imaginaires. On étudiera la forme et les propriétés de la courbe qui sépare les deux premières régions de la troisième.

1866. On considère la parabole et l'hyperbole équilatère qui correspondent, respectivement, aux équations

$$y^2-2px=0, \qquad xy-m^2=0.$$

On propose :

1° De former l'équation ayant pour racines les abcisses ou les ordonnées des pieds des normales communes à ces deux courbes.

2° De déduire de cette équation que le nombre des normales communes est au moins égal à *un* et au plus égal à *trois*.

3° De démontrer qu'en supposant

$$7p^4 > 2m^4,$$

il n'y a qu'une normale commune réelle.

1867. Étant donnés un triangle BOA rectangle en O et une droite D, située dans le plan de ce triangle, on propose :

1° De former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle BOA; 2° de calculer l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des parallèles à D. 3° D'examiner les différentes formes du lieu L qui correspondent aux directions diverses de la droite D.

1868. Soient deux paraboles P_1, P_2, ayant toutes deux pour foyer le point fixe O et, pour axes respectifs, les droites fixes OX, OY, droites qu'on suppose rectangulaires. On mène à ces paraboles une tangente commune : soient M_1 et M_2 les points de contact; trouver le lieu décrit par le milieu de $M_1 M_2$, sachant que cette droite passe par un point fixe.

1869. On donne un triangle rectangle isocèle AOB et on demande :

1° L'équation générale des paraboles P tangentes aux trois côtés du triangle AOB;

2° L'équation de l'axe de l'une quelconque de ces paraboles;

3° L'équation et la forme du lieu des projections du point O, sommet de l'angle droit AOB, sur les axes des paraboles P.

1872. On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites (A) et (B) respectivement parallèles aux axes et l'on demande :

1° De former l'équation générale des courbes du second degré qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui admettent comme normales les droites données (A) et (B);

2° De démontrer que par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir deux ellipses et une hyperbole ;

3° De faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

1873. On donne un cercle et un point A, et l'on demande le lieu des centres des hyperboles équilatères assujetties à passer par le point donné A et à toucher en deux points le cercle donné.

On discutera la courbe obtenue pour les différentes positions du point A et l'on démontrera que, dans le cas général, les points de contact des tangentes qu'on peut mener au lieu par le point A sont situés sur une circonférence de cercle.

1874. Étant donné un triangle, on sait que, par un point M de son plan, il passe, en général, deux paraboles circonscrites au triangle.

Cela posé, on demande de construire et de discuter le lieu du point M pour lequel les axes des deux paraboles correspondantes forment entre eux un angle donné.

1875. Trouver le lieu géométrique de l'intersection des deux normales menées à la parabole aux deux extrémités de toutes les cordes dont les projections orthogonales sur une perpendiculaire à l'axe ont une même valeur.

Que dire du cas où l'on fait tendre vers zéro cette valeur de la projection ?

Revenant au cas général, on propose de mener par un point quelconque du lieu trois normales à la parabole.

Application particulière au point maximum du lieu.

1875. (*Question retirée.*) Une conique donnée de forme et de grandeur se déplace de manière que chacun de ses foyers reste sur une droite donnée. A cette conique, parallèlement à l'une des droites données, on mène une tangente ; trouver le lieu des points de contact.

1876. 1. (*Admissibilité.*) 1° Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les cordonnées sont $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$, pour la surface représentée par l'équation.

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

2° On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

2. (*Admission.*) On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun des cercles on mène des tangentes qui soient, en même temps, normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact avec le cercle variable, du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu décrit par ce milieu. — Si l'équation du lieu se présente sous une forme irrationelle on devra la rendre rationnelle.

1877. 1. (*Admissibilité.*) 1° On donne une surface rapportée à un système de coordonnées rectangulaires

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4zx + 8xy - 8x + 6y + 2z = 0,$$

trouver l'équation de la même surface par rapport à un même système de plans principaux.

On opérera directement, en supposant connue l'équation du plan diamétral.

2° Démontrer que, dans une équation à coefficients réels, qui a ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du premier membre ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

On supposera connue la règle des signes de Descartes.

2. (*Admission.*) Soit, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes ; ξ, η, les coordonnées d'un point M du plan de l'hyperbole. Par ce point M, on mène deux tangentes à l'hyperbole ; soient A et B les points de contact.

Trouver l'équation du cercle passant par A, B et le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C, D, distincts de A et B ; trouver l'équation de la droite CD.

Si M décrit une ligne droite, aux diverses positions du point M correspondent diverses positions de CD ; trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites.

1878. 1. (*Admissibilité.*) 1° Méthode de Newton, fondée sur la considération des dérivées successives, pour trouver une limite supérieure des racines positives d'une équation.

2° Construire la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par les deux équations

$$x=\frac{t}{1-t^2}, \qquad y=\frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}.$$

2. (*Admission.*) On donne une droite D dont l'équation par rapport à deux axes rectangulaires ox et oy est

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1.$$

on considère les différentes coniques qui ayant pour axes ox et oy sont normales à la droite D. Chacune d'elles rencontre cette droite en deux points ; en ces points, on mène les tangentes à la conique.

Trouver l'équation du lieu du point de rencontre de ces tangentes.

Démontrer que ce lieu est une parabole et que la distance du foyer de cette parabole à son sommet est le quart de la distance du point O à la droite D.

On construira géométriquement l'axe et le sommet de la parabole.

1879. 1. (*Admissibilité.*) 1° Comment déduit-on du théorème de Sturm les conditions de réalité de toutes les racines d'une équation algébrique de degré donné.

2° Construire la courbe dont l'équation en cordonnées polaires est

$$\rho=\frac{\sin\omega}{2\omega-3\cos\omega}.$$

2. (*Admission.*) On donne une conique rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1,$$

et un point M cette conique. Par les extrémités d'un diamètre quelconque de la conique et le point M on fait passer un cercle. Prouver que le lieu décrit par le centre de ce cercle est une conique K passant par l'origine O des axes.

Si autour du point O, on fait tourner deux droites rectangulaires, elles rencontrent la conique K en deux points, prouver que le lieu des points de rencontre des tangentes menées en ces points est la droite perpendiculaire au segment OM et passant par le milieu de ce segment.

Par le point O on peut mener, indépendamment de la normale ayant son pied en O, trois autres droites normales à la conique K.

1° Dans le cas particulier où la conique donnée est une hyperbole équilatère et où $a = 1$, $b = -1$, montrer qu'une seule de ces normales est réelle et calculer les coordonnées de son pied.

2° Dans le cas général, trouver l'équation du cercle circonscrit au triangle formé par les pieds de ces trois normales.

Nota. Le pied de la normale est le point de la courbe d'où part la normale.

1880. Soient M et N les points où l'axe des x rencontre le cercle

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

considérons une quelconque des hyperboles équilatères qui passent par les points M et N; menons par un point Q, pris arbitrairement sur le cercle, des tangentes à l'hyperbole ; soient A et B les points où le cercle coupe la droite qui joint les points de contact.

Démontrer que, des deux droites QA et QB, l'une est parallèle à une direction fixe et l'autre passe par un point fixe P.

Le point P étant donné, l'hyperbole équilatère correspondante qui passe par les points M et N est déterminée. On construira géométriquement son centre, ses asymptotes et ses sommets.

Si le point P décrit la droite $y = x$, quel est le lieu décrit par les foyers de l'hyperbole ? On déterminera son équation et on le construira.

1881. 1. On considère une parabole P et une droite AB normale au point A à cette courbe (ce point A se projetant d'ailleurs sur l'axe au foyer même de la courbe).

Trouver le lieu des sommets des sections faites dans le cylindre droit qui a pour base P, par des plans passant par AB.

2. On donne une asymptote d'une hyperbole et un point P de la courbe. Sachant que l'un des foyers décrit la perpendiculaire menée du point P sur l'asymptote considérée, on demande le lieu du point M d'intersection de la seconde asymptote avec la directrice correspondant au foyer donné.

1882. On donne deux cercles se coupant aux points A et B. Une conique quelconque passant par ces points et tangente aux deux cercles rencontre l'hyperbole équilatère qui a ces points pour sommets en deux autres points C et D.

1° Démontrer que la droite CD passe par un des centres de similitude des deux cercles donnés.

2° Si l'on considère toutes les coniques qui passant par A et B sont tangentes aux deux cercles, démontrer que le lieu de leurs centres se compose de deux circonférences E et F.

3° Soit une conique satisfaisant à la question et ayant son centre sur l'une des circonférences, E ou F ; démontrer que les asymptotes de cette conique rencontrent cette circonférence en deux points fixes situés sur l'axe radical des deux circonférences données.

1883. (V. *Géom. plane* ; p. 635.)

1884. On donne une conique

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

On joint un point M de cette conique aux deux foyers F et F'.

1° On demande d'exprimer les coordonnées du cercle inscrit dans l'intérieur du triangle MFF', au moyen des coordonnées du point M.

2° Dans le cas où la conique donnée est une ellipse, on démontrera que si l'on considère les cercles inscrits dans deux triangles correspondant à deux points M et M' de la conique, l'axe radical de ces deux cercles passe par le point milieu du segment MM'.

3° Pour chaque position du point M, le rayon vecteur FM touche le cercle correspondant en un point P. On déterminera, en coordonnées polaires, l'équation du lieu décrit par le point P. On prendra le foyer F pour origine des rayons, et l'axe des x pour origine des angles.

CONCOURS GÉNÉRAL

CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

A. Les deux côtés AE, AF d'un angle plan EAF étant supposés fixes et coupés par une droite mobile BC; trouver la courbe que décrit le centre de gravité G du triangle ABC, quand la droite BC se meut de telle sorte que la surface du triangle ABC reste constante.

1812. Étant donné un quadrilatère AGFH dont les quatre côtés ne sont pas situés dans un même plan, on demande :

1° L'équation de la surface décrite par une droite ED qui, dans son mouvement, couperait toujours proportionnellement les deux côtés opposés AH, GF, de manière que dans chaque position de la droite génératrice on eût la proportion

$$\frac{AE}{EH} = \frac{GD}{DF}.$$

2° L'équation de la surface engendrée par le mouvement d'une seconde droite BC qui couperait proportionnellement les deux autres côtés du même quadrilatère, de sorte qu'on eût la proportion

$$\frac{AB}{BG} = \frac{CH}{CF}.$$

3° On demande si ces deux surfaces sont différentes.

1813. Étant donnés dans un plan un parallélogramme et une droite, on demande de construire avec la règle et le compas les points où la droite serait rencontrée par une ellipse inscrite au parallélogramme et qui toucherait les quatre côtés du parallélogramme en leurs milieux.

B. Les trois arêtes d'un angle solide A, étant supposées fixes et coupées par un plan mobile BDC, trouver l'équation de la surface courbe que décrit le centre de gravité de la pyramide comprise entre les faces de l'angle solide et le plan dont il s'agit, quand ce plan se meut de manière que le volume de la pyramide reste toujours le même.

C. Étant données une sphère et trois droites dans l'espace, mener un plan tangent à la sphère qui fasse des angles égaux avec ces droites.

D. Un cercle étant donné dans un plan horizontal, on demande: 1° De faire voir que si l'on coupe un cône droit dont le cercle soit la base, par

une suite de plans verticaux et parallèles entre eux, les sections résultantes seront des hyperboles qui auront leurs asymptotes parallèles. 2° De trouver sur la verticale élevée par le centre du cercle, le point où il faut placer le sommet du cône pour que les hyperboles soient équilatères.

E. Trouver l'équation de la surface engendrée par une parabole tournant autour de son axe et déterminer la position que doit avoir cet axe pour que l'intersection de la surface par un plan quelconque, donne un cercle pour projection sur un plan donné.

F. On donne de position le rayon d'une sphère et l'on propose de démontrer qu'un plan quelconque perpendiculaire à ce rayon, coupe, suivant un cercle, tout cône qui a son sommet à l'extrémité du rayon et pour base un cercle de la sphère.

G(1). Étant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est le tiers de l'apothême; si l'on prend sur la surface du cône un point situé à la distance a du sommet et que de ce point, comme centre, avec une ouverture de compas égale à r, on trace sur la surface du cône une courbe, laquelle pourrait être considérée comme l'intersection de cette surface avec celle de la sphère qui a son centre au point donné et dont le rayon est r. Si ensuite on développe la surface convexe du cône en une surface plane, laquelle sera un secteur circulaire, dont l'angle est $\frac{4}{3}$ d'angle droit, on demande l'équation de la courbe tracée sur la surface du cône et devenue plane par le développement de cette même surface en un secteur plan.

L'équation de la courbe étant trouvée en général, et pour toutes les valeurs de r et de a, on fera : $a=3$ $r=2$; et on déterminera pour ce cas particulier la figure exacte de la courbe, en la traçant dans toute son étendue.

On examinera de plus si la courbe est décrite tout entière par le compas qui tourne autour du point donné ou s'il n'y a qu'une partie de la courbe décrite par ce procédé et quelle est cette partie.

1824. (V. *Alg.*, p. 612.)

1827. Étant donnée une droite AB dont la position et la longueur sont invariables, trouver dans l'espace un point M tel que la différence des angles MAB, MBA soit égale à un angle donné α.

1828. Connaissant le paramètre d'une parabole donnée dans un plan; mener par le foyer de cette courbe une droite terminée de part et d'autre par la parabole et égale à une ligne donnée. Quand la question sera résolue, déterminer la droite cherchée par une construction faite sur la figure et examiner quel est le nombre des solutions dont la question est, en général, susceptible.

1829. 1° Une surface sphérique et une surface de cylindre droit à base circulaire étant données, et se coupant suivant une courbe à double courbure, on suppose que de tous les points de cette courbe on abaisse des

1. Les questions A, B..., G ont été posées au concours général entre les années 1806 et 1823.

perpendiculaires sur le plan P qui passe par le centre de la sphère et l'axe du cylindre. On demande l'équation de la courbe formée par les points où le plan P est rencontré par ces perpendiculaires.

2° Connaissant le paramètre d'une parabole donnée dans un plan, mener par le foyer de cette courbe une droite terminée de part et d'autre à la parabole et telle que le foyer partage cette droite en deux portions qui soient entre elles dans le rapport de n à l'unité.

1833. Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendiculaire à la sécante. On résoudra le même problème : 1° Lorsque les deux côtés coupés sont égaux; 2° lorsque les trois côtés sont égaux.

1837. Étant données, dans un plan, deux paraboles égales dont les sommets se touchent et dont les axes sont tournés en sens contraires; on suppose que l'une d'elles roule sur l'autre de manière que, dans chacune des positions qu'elle vient occuper successivement, elle lui soit toujours tangente en un point également éloigné du sommet de la parabole fixe et du sommet de la parabole mobile. Pendant ce mouvement, le sommet de cette dernière courbe décrit un lieu dont on demande l'équation.

1844. Étant donnés une ellipse et un point A sur l'ellipse, on décrit un cercle tangent à la courbe en ce point et l'on mène au cercle et à l'ellipse les deux tangentes communes, autres que celles qui toucheraient les deux courbes données au point A. On demande le lieu du point commun à ces deux tangentes quand on fait varier le rayon du cercle (1).

1845. Étant donnés un cercle et un point situé dans son intérieur, on imagine que sur chacun des diamètres de ce cercle on décrive une ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par le point donné. On demande :

1° L'équation générale de ces ellipses,

2° Le lieu géométrique de leurs foyers,

3° Le lieu des extrémités de leurs petits axes.

1846. Étant donnée une ellipse, si on lui circonscrit des rectangles tels que ABCD, on sait que tous les sommets sont situés sur un même cercle concentrique à l'ellipse. Cela étant admis, des points de contact N et Q de deux côtés opposés de chaque rectangle, on mène deux droites au point de contact M de l'un des deux autres côtés et l'on demande de prouver :

1° Que MN et MQ sont également inclinées sur le côté AB,

2° Que MN + MQ est constante,

(1) On peut généraliser cette question en supposant que les circonférences mobiles passent par deux points fixes A, B, de l'ellipse donnée. Cet exercice intéressant a été l'objet de diverses solutions.

Gerono (*Nouvelles annales*, t. X, p. 408). — Mister et Neuberg (*Id.* 1863). — P. Serret (*Id.*, 1864). — Doucet (*Id.*, 1873). — Macé de Lépinay (*Id.*, 1880, p. 91). — Le P. Le Cointe (*Id.*, 1880, p. 122).

Voyez aussi une solution de M. Breton (de Champ) dans l'Introduction à la Géométrie supérieure de M. Housel (p. 177).

3° Que ces droites MN, MQ, enveloppent une ellipse homofocale à la proposée.

1847. Un triangle PQR étant circonscrit à un cercle, on forme un second triangle dont les sommets A, B, C, sont les points milieux des côtés du premier. Des sommets de ce second triangle, on mène au cercle les tangentes A*a*, B*b*, C*c*, qui rencontrent respectivement en *a*, *b*, *c*, les côtés opposés à ces sommets. On propose de démontrer que ces trois points sont en ligne droite.

On verra si le théorème a également lieu lorsque, à la place du cercle inscrit, on prend une section conique quelconque tangente aux trois côtés du triangle PQR.

1848. Soit dans le plan d'une ellipse donnée, une droite quelconque TS; par le centre C de l'ellipse, on mène le diamètre ACB conjugué à la direction de cette droite et qui va la couper au point O. On prolonge ensuite la ligne OC d'une longueur OM, telle que OC. CM $=$ CA^2. On suppose que la droite TS se meuve de manière à être toujours tangente à une courbe donnée et l'on demande quelle sera la courbe décrite par le point M. On indiquera la méthode à suivre et l'on en fera l'application au cas suivant. L'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, et la droite TS reste tangente à la courbe qui est représentée par l'équation $x^2=9y$.

1849. Soient, dans un plan, une ellipse et une droite située hors de cette ellipse. On prend sur la droite deux points N, N′, conjugués par rapport à l'ellipse (c'est-à-dire deux points tels que la polaire de l'un passe par l'autre); cela posé :

1° Prouver qu'il existe dans le plan de l'ellipse deux points O, O′, desquels on voit chaque segment NN′ sous un angle droit. 2° On demande le lieu des points O, O′, quand la droite se meut parallèlement à elle-même.

1850. Étant donnés deux axes fixes *ox*, *oy* ; autour d'un point fixe P, on fait tourner un angle APB de grandeur constante et donnée (A, marquant le point où l'un des côtés de l'angle va couper *ox*, et B, le point où l'autre côté coupe l'axe *oy*). On demande de prouver qu'il existe sur *ox* un point fixe A′ et sur *oy* un point fixe B′ tels que le produit AA′ $\times$ BB′ reste constant pour toutes les positions de l'angle. On examinera le cas particulier où les droites *ox*, *oy*, coïncident.

1851. Étant donnée une droite L, on mène, de chacun de ses points M, deux droites à deux points fixes P et P′. Deux autres points fixes O, et O′, sont les sommets de deux angles AOB, A′OB′, de grandeurs données et constants, que l'on fait tourner autour de leurs sommets respectifs de manière que leurs côtés OA, O′A′, soient respectivement perpendiculaires aux deux droites MP, M′P′. On demande quelle est la courbe décrite par le point d'intersection N des deux droites OA, O′A′ et la courbe qui est décrite par le point d'intersection des deux autres côtés OB, O′B′, quand le point M glisse sur la droite fixe L.

1854. Si l'on prend pour diamètre d'un cercle la portion de l'axe non transverse comprise entre le centre et la normale en un point quelconque

de la courbe, la tangente menée au cercle par ce dernier point est égal au demi-axe réel.

Résoudre, d'après cela, la question suivante : Étant donnés les deux sommets et un troisième point quelconque de l'hyperbole, construire la normale en ce point. Indiquer les propriétés et les constructions analogues pour l'ellipse.

1857. Étant données deux coniques C et C′, on mène dans la première tous les systèmes possibles de diamètre conjugués et par un point de la circonférence de l'autre on mène des parallèles aux diamètres de chaque système. Faire voir que la droite qui joint les seconds points d'intersection de ces parallèles avec la courbe passent par un même point.

1859. Par un point donné sur l'axe d'un paraboloïde de révolution on mène une sécante et par les points où cette sécante rencontre la surface, on mène des normales à la section méridienne qui la contient ; ces normales se rencontrent en un point dont on demande le lieu. On examinera si tous les points de la surface font réellement partie du lieu.

1860. On donne deux ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'ellipsoïde A et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B.

1861. Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu des centres des sections planes dont l'aire est égale à une constante donnée.

1862. Deux paraboles de même paramètre ont leurs axes à angle droit ; l'une d'elles est fixe, l'autre est mobile. Une corde commune AB passe constamment par le pied D de la directrice de la parabole fixe ; on demande le lieu décrit par le sommet de la parabole mobile.

1863. Une surface du second degré de révolution pourvue d'un centre se meut de manière que dans chacune de ses positions elle rencontre suivant une circonférence de cercle, une surface du second degré fixe et donnée. On demande le lieu du centre de la surface mobile.

1864. On donne deux coniques ayant un même foyer et leurs axes proportionnels. Soient FA, FA, leurs rayons vecteurs minimums; on fait tourner ces rayons vecteurs autour de F, en conservant leur distance angulaire ; soit FC, FC′, une position. En C et C′ on mène les tangentes à chacune des coniques ; trouver le lieu de leur point de rencontre.

1865. Étant données deux coniques tangentes en un point O, on leur mène une tangente commune OR, ainsi que les tangentes communes extérieures AA′, BB′, qui se coupent en M. Cela posé, on propose de démontrer que :

1° La droite PP′, qui joint les points P et P′ diamétralement opposés au point O dans les deux coniques, passe par le point M.

2° Les droites AB, A′ B′, qui joignent les points de contact de chaque conique avec les tangentes extérieures communes, se coupent en un point R qui est situé sur la tangente commune OR.

3° Les tangentes menées aux deux coniques par le point R touchent les courbes en des points qui sont situés sur la droite MC.

On fera voir que, généralement, le point R ne partage cette propriété

avec aucun autre point et on déterminera la condition qui doit être remplie pour qu'il existe une ligne telle que les tangentes menées par chaque point de cette ligne aux deux coniques donnent quatre points de contact en ligne droite.

1866. Démontrer que 1° les quatre points d'intersection de deux coniques quelconques inscrites dans un rectangle donné sont les sommets d'un parallélogramme dont les côtés sont parallèles à deux directions fixes.

2° Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point du plan à toutes les coniques inscrites dans un rectangle donné ; ou bien des tangentes parallèles à une direction donnée.

3° Trouver le lieu des points de toutes ces coniques où la tangente fait un angle donné avec le diamètre qui aboutit au point de contact.

1867. Un ellipsoïde étant donné, on propose de trouver une droite L dans l'espace, et un point P sur l'ellipsoïde, de façon que les cônes qui ont pour sommet commun le point P, et pour bases les sections faites dans l'ellipsoïde par des plans contenant L, soient de révolution. On cherchera en outre, quel est le lieu des positions occupées par la droite L, lorsque le plus grand et le plus petit axe de l'ellipsoïde restant invariables, on fait varier la longueur de l'axe moyen.

1868. On propose :

1° De trouver le lieu géométrique des points divisant dans un rapport donné les portions des tangentes à une conique fixe qui sont comprises entre deux droites fixes.

2° De classer méthodiquement, en s'attachant surtout aux cas généraux, les diverses formes que ce lieu géométrique peut affecter.

3° De trouver les conditions que doivent remplir la conique et les deux droites fixes pour que le lieu géométrique demandé se décompose en lignes droites ou en lignes du second ordre.

1869. On donne un cercle dont le centre est en O, et un point P dans le plan de ce cercle, en dehors de la circonférence; trouver le lieu décrit par les foyers d'une hyperbole équilatère, doublement tangente au cercle et passant par le point P.

On construira le lieu en supposant la distance PO égale au triple du rayon du cercle.

1870. Deux ellipses ont leur centre en un même point et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites. Déterminer le lieu d'un point tel que les cônes ayant ce point pour sommet commun, et les deux ellipses pour directrices, soient égaux.

1872(1). Étant donné un prisme triangulaire droit on le coupe par des plans rencontrant les trois arêtes, de telle manière que les volumes des troncs de prisme obtenus soient dans un rapport donné :

1° Trouver la surface engendrée par le centre de gravité de l'un des troncs de prisme, quand le plan sécant se déplace sans cesser de rencontrer les trois arêtes.

(1) Il n'y a pas eu de concours général en 1871.

2° Trouver les courbes qui forment les contours de ces surfaces.

On examinera, en particulier, le cas où le prisme donné a pour bases des triangles équilatéraux.

1873. Une surface du second degré étant donnée, ainsi que deux points A, B, sur cette surface ; il existe une infinité de surfaces du second degré Σ qui sont tangentes en A et B, à S. On propose de trouver :

1° Le lieu géométrique des centres des surfaces Σ.

2° Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener parallèlement à un plan donné.

3° Le lieu géométrique des points de contact de ces surfaces avec les plans tangents qu'on peut leur mener par une droite donnée.

1874 (*Paris*). Démontrer que la forme la plus générale d'un polynôme entier F (x) satisfaisant aux relations :

$$F(1-x) = F(x), \qquad F\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{F(x)}{x^m}$$

est :

$$F(x) = (x^2-x)^{2p}(x^2-x+1)^q \{ A_0(x^2-x+1)^{3n} + A_1(x^2-x+1)^{3(n-1)}(x^2-x)^2 + A_2(x^2-x+1)^{3(n-2)}(x^2-x)^4 + \ldots + A_n(x^2-x)^{2n} \}$$

p, q, n désignant des nombres entiers, et A_0, A_1, A_2,.... A_n des constantes quelconques.

1874 (*Départements*). Si l'on considère la fonction e^{-x^2} de la variable x et que l'on en prenne les dérivées successives, on reconnait que la dérivée de l'ordre n est égale au produit de la fonction e^{-x^2} par un polynôme entier en x que l'on représentera par $\varphi_n(x)$.

1° Démontrer que les polynômes $\varphi(x)$ satisfont aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= -2x\varphi_{n-1}(x) - 2(n-1)\varphi_{n-2}(x), \\ \varphi_n'(x) &= -2n\varphi_{n-1}(x), \\ \varphi_n''(a) &= -2x\varphi_n'(x) + 2n\varphi_n(x) = 0. \end{aligned}$$

2° Calculer les coefficients du polynôme $\varphi_n(x)$ ordonné suivant les puissances de x.

1875. Étant donnés un ellipsoïde, un plan P, et un point A dans ce plan ; trouver le lieu des sommets des cônes circonscrits à l'ellipsoïde et tels que la section de chacun de ces cônes, par le plan P, admette pour foyer le point A.

1876. Étant donné un parallélipipède on considère trois arêtes, qui n'ont pas d'extrémités communes et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes :

1° Trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré, passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes.

2° Chercher les droites réelles situées sur la surface.

3° Étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'une des faces du parallélipipède.

1877. Rechercher les surfaces S du second degré sur lesquelles existe une droite D telle que l'hyperboloïde de révolution H qui a pour axe une génératrice quelconque G, de la surface S, et du même système que D, et qui passe par la droite D, coupe orthogonalement la surface S en tous les points de cette droite.

Si l'on considère tous les hyperboloïdes H qui se rapportent à une même surface S, jouissant de la propriété énoncée :

1° Trouver le lieu des sommets A et celui des foyers F des hyperboloïdes H′ conjugués des hyperboloïdes H;

2° Par l'un des foyers F de l'hyperboloïde H′, on mène un plan P parallèle à la perpendiculaire commune aux deux droites G et D, et faisant, avec cette dernière, un angle supplémentaire de celui que fait, avec cette même droite, l'axe G de l'hyperboloïde H; trouver le lieu de la droite qui joint le point où le plan P coupe la droite D à l'un des points où ce plan coupe la courbe d'intersection de la surface S et de l'hyperboloïde H.

1878. Les droites A′OA, B′OB, C′OC sont trois axes de coordonnées rectangulaires; on suppose $OA' = OA = a$, $OB' = OB = b$, $OC' = OC = c$. Déterminer :

1° Le lieu des axes de révolution des surfaces de révolution du second degré qui passent par les six points A, A′, B, B′, C, C′.

2° Le lieu des extrémités D de ces axes.

On construira la projection du lieu des points D sur le plan AOB, en supposant $a > c > b$ et l'on partagera la courbe en arcs tels que chacun d'eux corresponde à des surfaces de même espèce.

1879. On donne une hyperboloïde à une nappe et un point dans le plan du cercle de gorge. Par ce point on mène une droite parallèle à une génératrice de la surface. Cette droite est l'axe d'un cylindre de révolution qui passe par la génératrice de l'hyperboloïde. Trouver l'équation de la projection sur le plan des xy de l'intersection des deux surfaces. La projection a un point double dont on demande le lieu lorsque la droite varie.

1880. Sur une courbe donnée du troisième degré, ayant un point de rebroussement O, on considère une suite de points

$$A_{-n},\ A_{-(n-1)},\ \ldots,\ A_{-2},\ A_{-1},\ A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n;$$

tels que la tangente en chacun de ces points rencontre la courbe au point suivant :

1° Étant données les coordonnées du point A_0, on propose de trouver les coordonnées des points A_{-n}, A_n, et de déterminer les limites vers lesquelles tendent ces points quand l'indice n augmente indéfiniment.

2° On demande le lieu décrit par le premier point limite, lorsque la

courbe du troisième degré se déforme en conservant le même point de rebroussement O, la même tangente en ce point, et en passant constamment par trois points fixes P, Q, R.

3° On étudiera comment varient les points d'intersection de ce lieu et les côtés du triangle PQR, quand les sommets de ce triangle se déplacent sur des droites passant par O.

1881. Trouver le lieu des points tels que les pieds des six normales qu'on peut mener de l'un quelconque d'entre eux à un ellipsoïde donné, à trois axes inégaux, se séparent en deux groupes de trois points dont les plans respectifs soient parallèles entre eux.

Montrer que, si l'on se donne un point P du lieu, la solution de ce problème « mener du point P les normales à l'ellipsoïde » dépend de la résolution de deux équations du troisième degré.

Discuter ces équations.

1882. Par un point quelconque P pris dans le plan d'une parabole donnée, dont le sommet est en O, on mène à cette courbe trois normales qui la rencontrent aux points A, B, C. Les longueurs PA, PB, PC, PO étant représentées respectivement par a, b, c, l; on demande de former l'équation du troisième degré dont les racines sont $l^2 - a^2$, $l^2 - b^2$, $l^2 - c^2$, et d'indiquer les signes des racines d'après la portion du point P dans les diverses régions du plan.

1883. D'un point P pris sur une normale en un point A d'un paraboloïde elliptique, on peut mener à la surface quatre autres normales ayant pour pieds B, C, D, et E; 1° on demande de trouver l'équation de la sphère S passant par les quatre points B, C, D, et E; 2° de trouver le lieu des centres I de la sphère S quand le point P se déplace sur la normale au point A, ainsi que la surface engendrée par la droite PI.

1884. Par le centre d'une ellipsoïde donné, on mène trois diamètres conjugués quelconques; et, par les points où ces droites rencontrent la sphère circonscrite au parallélipipède formé par les plans tangents au sommet de l'ellipsoïde, on fait passer des plans; 1° trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné P sur ces plans variables; 2° ce lieu est une surface du quatrième ordre dont l'équation peut être ramenée à la forme suivante :

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 4Ax^2 + 4A'y^2 + 4A''z^2 + 8Cx + 8C'y + 8C''z + 4D = 0;$$

trouver toutes les sphères telles que chacune d'elles coupe la surface suivant deux cercles; 3° ces sphères forment cinq séries parmi lesquelles deux ne sont pas distinctes. Démontrer que les sphères de la série *double* passent toutes par un même point, et trouver le lieu de leurs centres. Démontrer que les sphères de chacune des trois autres séries coupent respectivement à angle droit des sphères fixes S_1, S_2, S_3. Trouver le lieu des centres des sphères de ces trois séries.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

1870. Par l'axe transverse d'une hyperbole donnée, on mène un plan P faisant un angle α avec le plan de la courbe, puis dans le plan P, une droite OZ, perpendiculaire à cet axe transverse.

Trouver l'équation de la surface de révolution décrite par la rotation de l'hyperbole autour de OZ.

Construire la section méridienne de la surface, en supposant 1° l'hyperbole équilatère ; 2° la droite OZ menée par l'un des sommets de la courbe ; 3° l'angle α égal à 45 degrés.

1872 (1). Par un point fixe A, pris sur une surface du second degré donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en A :

1° Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe par le point A ;

2° Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement a la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point A ;

3° Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en A coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.

1873. Étant donnés une ellipse A et un point P dans son plan, de ce point P on mène des normales à l'ellipse A et l'on considère la conique B qui passe par le point P et les pieds des quatre normales :

1° Trouver les coordonnées du centre de cette conique B et celles de ses foyers.

2° Trouver le lieu C du centre et le lieu D des foyers de la conique B, lorsque l'ellipse A varie de manière que ses foyers restent fixes.

3° Trouver le lieu des points d'intersection du lieu D et de la droite OP lorsque le point P décrit un cercle de rayon donné et ayant pour centre le centre O de l'ellipse A.

1874. 1° Par les trois sommets d'un triangle rectangle on fait passer des paraboles. On mène à ces paraboles des tangentes parallèles à l'hypoténuse du triangle donné. On demande le lieu des points de contact.

2° Le lieu cherché est une conique qui coupe chacune des paraboles en quatre points. On demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle formé par les sécantes communes qui ne passent pas par l'origine.

1. Il n'y a pas eu de concours en 1871.

1875. On considère une infinité d'ellipses semblables entre elles ayant un sommet fixe O et la même tangente en ce point ; on demande le lieu des pieds des normales menées, d'un point fixe P, à ces ellipses.

On construira le lieu, dans le cas particulier où OP est incliné de 45 degrés sur la tangente fixe donnée et en supposant, successivement, que le rapport des axes des ellipses considérées est égal à $\sqrt{3}$ ou égal à 2.

1876. On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires *ox*, *oy*, et telles que la droite PQ, qui joint leurs points de contact P et Q avec les deux droites, passe par un point fixe donné.

1° On demande le lieu du point d'intersection de la normale en P à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en Q.

2° On demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan.

3° On demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné.

On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45 degrés et où le point A est sur la droite *ox*.

1877. On considère toutes les coniques circonscrites à un triangle ABC rectangle en A, et telles que les tangentes en B et C à ces coniques aillent se couper sur la hauteur du triangle. On demande :

1° Le lieu du point de concours des normales en B et C à ces coniques ;

2° Le lieu du centre de ces coniques : on distinguera les points du lieu qui sont centres des ellipses, de ceux qui sont centres des hyperboles ;

3° Le lieu des pôles d'une droite quelconque D. Ce lieu est une conique. On considère toutes les droites D pour lesquelles cette conique est une parabole et l'on demande le lieu des projections du point A sur ces droites.

1878. On donne une conique et deux points fixes A et B sur cette courbe. Une circonférence quelconque passant par les deux points A et B rencontre la conique en deux autres points variables C et D ; on mène les droites AC, BD qui se coupent en M, les droites AD, BC qui se coupent en N.

Déterminer:

1° Le lieu des points M et N ;

2° Le lieu des points de rencontre de la droite MN avec la circonférence à laquelle elle correspond.

On construira les deux lieux.

1879. Étant donné un tétraèdre OABC défini par l'angle trièdre O et les longueurs $4a$, $4b$, $4c$ des trois arêtes OA, OB, OC.

1° Démontrer que l'ellipsoïde qui admet pour diamètres conjugués les trois droites qui joignent les milieux des arêtes opposées deux à deux, est tangent aux six arêtes du tétraèdre.

2° Trouver l'intersection de cet ellipsoïde et de l'hyperboloïde engendré par une droite mobile qui s'appuie sur les trois droites :

La première menée par le milieu de OA parallèlement à OB,
La deuxième » » OB » OC,
La troisième » » OC » OA.

Par chacun des points où la droite mobile rencontre la surface, on mène un plan parallèle au plan tangent à l'ellipsoïde à l'autre point.

Démontrer que ces plans passent par le centre ω et trouver le lieu décrit par l'intersection de ces deux plans.

1880. Étant donné un paraboloïde hyperbolique, on considère une génératrice rectiligne A de cette surface et la génératrice B du même système qui est perpendiculaire à la première ; par les points a et b où ces droites sont rencontrées par leur perpendiculaire commune passent deux génératrices rectilignes A′ et B′ de l'autre système; soient a' et b' les points où les deux droites A′ et B′ sont rencontrées par leur perpendiculaire commune.

1° Trouver le lieu des points a et b, et celui des points a' et b', quand la droite A décrit le paraboloïde.

2° Trouver le lieu du point de rencontre des droites A et B′, ou A′ et B.

3° Calculer le rapport des longueurs $a'\,b'$ et $a\,b$ des perpendiculaires communes, et étudier la variation de ces longueurs.

1881. On considère la courbe

$$27y^2 = 4x^3.$$

1° On demande la condition à laquelle doivent satisfaire les paramètres m et n pour que la droite $y = mx + n$ soit tangente à cette courbe.

2° On demande le lieu des points d'où l'on peut mener à la courbe proposée deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués de la conique représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + 2axy = \mathrm{B}.$$

3° Par un point A pris sur la courbe on mène des sécantes coupant cette courbe en deux points variables M et M′. On demande le lieu du milieu du segment M M′. Discuter la forme de ce lieu et indiquer les arcs qui répondent à des sécantes pour lesquelles les points MM′ sont réels.

1882. Soit un point fixe donné P ayant pour coordonnées a et b par rapport à deux angles rectangulaires Ox, Oy, et soient A et B les pieds des perpendiculaires abaissées du point P sur ces deux axes. On considère les courbes du second ordre tangentes aux deux axes en ces points A et B; du point P on mène à chacune de ces courbes deux normales variables PM, PM′.

1° Déterminer l'équation de la droite MM′ qui joint les pieds des normales variables, et démontrer que cette droite passe par un point fixe.

2° Déterminer l'équation de la courbe C lieu des points M et M′. Construire la courbe C, dans l'hypothèse $a = 2\,b$, au moyen de coordonnées polaires ayant le point O pour pôle.

1883. (V. *Géom. plane*; p. 635.)

1884. a et b désignant les coordonnées rectilignes rectangulaires d'un point M, quelle est pour chaque position de ce point la nature des racines de l'équation

$$3t^4 + 8at^3 - 12bt^2 + 4b = 0\ ?$$

On construira, en particulier, le lieu des positions du point M pour lesquelles l'équation admet une racine double, en calculant les coordonnées d'un point du lieu en fonction de cette racine.

ÉCOLE CENTRALE

1880. (*Première session.*) Soient ox, oy, deux axes rectangulaires et sur ox un point A, sur oy un point B. On mène par le point A une droite quelconque AR, de coefficient angulaire m.

1° Former l'équation de l'hyperbole H qui est tangente à l'axe ox au point o, qui passe par le point B, et pour laquelle AR est une asymptote.

2° On fait varier m et on demande le lieu décrit par le point de rencontre de la tangente en B à l'hyperbole H et de l'asymptote AR.

3° On considère le cercle circonscrit au triangle AOB ; ce cercle coupe l'hyperbole H aux points O et B, et en deux autres points P et Q. Former l'équation de cette droite PQ ; puis, faisant varier m, trouver successivement les lieux des points de rencontre de cette droite PQ avec les parallèles menées par le point o, soit à l'asymptote AR, soit à la seconde asymptote de l'hyperbole H.

1880. (*Deuxième session.*) 1° Écrire l'équation générale des paraboles passant par deux points donnés A et B et dont les diamètres ont une direction donnée.

2° Donner l'expression des cordonnées du sommet et du foyer de ces paraboles.

3° On mène à chaque parabole une tangente perpendiculaire à la droite AB, trouver le lieu des points de contact et construire ce lieu.

1881. (*Première session.*) Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation d'une ellipse rapportée à son centre O et à ses axes ; soient α, et β, les coordonnées d'un point P situé dans le plan de cette ellipse.

1° Démontrer que les pieds des normales menées à cette ellipse par le point P sont situés sur l'hyperbole representée par l'équation

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0,$$

dans laquelle $c^2 = a^2 - b^2$.

2° On considère toutes les coniques qui passent par les points A, B, C, D, communs à l'ellipse proposée et à cette hyperbole ; dans chacune d'elles on mène le diamètre conjugué à la direction OP et on projette le point O sur ce diamètre : trouver le lieu de cette projection.

3° Par les points A, B, C, D, on peut faire passer deux paraboles : trouver le lieu du sommet de chacune d'elles quand le point P se meut sur une droite de coefficient angulaire donné m, menée par le point O.

On examinera le cas particulier où $m = \frac{a^3}{b^3}$ et celui où $m = -\frac{a^3}{b^3}$.

1881. (*Seconde session.*) On donne une parabole ($y^2 = 2px$) rapportée à son axe et à son sommet et un point P (α, β) dans le plan de la courbe.

1° Démontrer que, du point P, on peut en général mener trois normales à la parabole : former l'équation du troisième degré qui donne les ordonnées des pieds A, B, C de ces normales.

2° Démontrer que chacune des deux courbes

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$
$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

passe par les quatre points A, B, C, P, et trouver l'équation générale de toutes les coniques passant par ces quatre points.

3° Chacune de ces coniques coupe la parabole donnée aux trois points fixes A, B, C, et un quatrième point D, trouver les coordonnées du point D.

4° Par le sommet de la parabole donnée, on imagine deux droites parallèles aux asymptotes de l'une quelconque des coniques précédentes; on mène la droite joignant les points d'intersection de ces deux droites avec la conique, et on la prolonge jusqu'à sa rencontre avec la parallèle DD' menée à l'axe de la parabole par le point D.

Former et discuter l'équation du lieu de ce point de rencontre.

1882. (*Première session.*) Soit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, l'équation d'une ellipse rapportée à son centre et à ses axes, et soient α et β les coordonnées d'un point P situé dans le plan de l'ellipse.

Former l'équation générale des coniques qui passent par les points de contact M et M' des tangentes menées du point P à l'ellipse et par les points Q et Q' où cette ellipse est rencontrée par la droite qui correspond à l'équation $\frac{\alpha x}{a^2} - \frac{\beta y}{b^2} + \mu = 0$.

Disposer du paramètre μ et de l'autre paramètre variable que contient l'équation générale, de manière qu'elle représente une hyperbole équilatère passant par le point P.

On fait mouvoir le point P sur la droite représentée par l'équation $x + y = l$, et l'on demande :

1° Le lieu décrit par la projection du centre de l'ellipse sur QQ' ;

2° Le lieu décrit par le point de concours des cordes MM' et QQ'.

Démontrer que ce dernier lieu passe par deux points fixes, quel que soit l, et déterminer ces points.

Chercher pour quelles valeurs de l ce lieu se réduit à deux droites, et déterminer ces droites.

1882. — *Seconde session.* On donne dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires, Ox, Oy, et deux points H et H', le premier défini par ses coordonnées a et b, et le second symétrique du premier par rapport au point O. Par ce dernier point O on mène une droite indéfinie DOE, formant avec l'axe Ox un angle $DOx = \theta$, on projette les points H et H' sur cette droite en h, h'. On projette le point h en u sur l'axe Ox, et le point u en u_1 sur la droite DOE; on projette le point h en v sur l'axe Oy,

et le point v en v_1 sur la droite DOE; toutes ces projections sont orthogonales. Enfin, sur la longueur $u_1\, v_1$ comme hypothénuse, on construit un triangle rectangle $u_1\, v_1$ S, en menant u_1S parallèle à Ox, et v_1S parallèle à Oy. Cela posé, on demande :

1° De trouver les coordonnées du point S, en fonction des trois constantes a, b, θ;

2° D'écrire l'équation d'une parabole ayant le point S pour sommet et la droite DOE pour directrice;

3° De démontrer que le lieu des foyers de toutes les paraboles, en faisant varier l'angle θ, se compose d'un système de deux circonférences de cercle:

4° De démontrer que toutes ces paraboles sont tangentes aux axes de coordonnées;

5° De démontrer que les cordes de leurs contacts avec ces axes se croisent en un même point.

1883. (V. *Géom. plane*, p. 634).

1884. (*Première session.*) On donne l'équation $a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 = 0$ d'une hyperbole rapportée à son centre et à son axe, et l'équation $y - Kx = 0$ d'une droite menée par le centre de cette hyperbole.

I. Former l'équation générale des coniques qui passent par les points réels ou imaginaires communs à l'hyperbole et à la droite donnés, et qui de plus sont tangentes à l'hyperbole en celui des deux sommets de cette hyperbole qui est situé sur la partie positive de l'axe des x. Discuter cette équation générale et reconnaître la nature des coniques qu'elle peut représenter.

II. Trouver le lieu des centres des coniques représentés par l'équation générale précédente. Ce lieu est une conique Δ, chercher un nombre de points et de tangentes suffisant pour déterminer géométriquement cette conique Δ.

III. Trouver le lieu des points de contact des tangentes menées à la conique Δ, parallèlement à la droite de coefficient angulaire $\frac{b}{a}$, quand on fait varier K. — On vérifiera que l'équation de ce dernier lieu, qui est du troisième degré, représente trois droites.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

1859. Trouver le lieu géométrique des points dont les distances à deux droites données (non situées dans un même plan) ont entre elles un rapport constant.

Quelles sont les surfaces du second degré auxquelles s'applique ce mode de génération, et quelle est la situation des deux droites à l'égard de ces surfaces ?

1860. Trouver et discuter l'équation de la surface engendrée par une parabole du second degré qui se meut parallèlement à elle-même, de manière que, dans chacune des positions de son plan, elle rencontre en

deux points une autre courbe du second degré *fixe et donnée en dehors de ce plan.*

1861. Étant donné un triangle ABC et un point P situé dans son plan, on mène par ce point une droite quelconque qui rencontre les côtés du triangle ou leurs prolongements en A′, B′, C′; puis on prend sur cette droite un point M tel que l'on ait

$$\frac{PB'+MB'}{PC'+MC'}=\frac{\overline{A'C'}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

On demande le lieu géométrique du point M.

On s'assurera d'abord que l'équation du lieu contient un facteur linéaire.

1862. Étant données deux droites non situées dans un même plan, on fait passer par ces droites un paraboloïde hyperbolique, auquel on mène un plan tangent parallèle à un plan fixe et donné. On demande le lieu du point de contact.

1863. Trouver le lieu d'une droite s'appuyant sur un cercle et sur deux droites fixes qui rencontrent le cercle. Dans quel cas les plans qui passent par une génératrice et par les deux droites fixes sont-ils constamment rectangulaires? Trouver dans ce cas les secondes sections circulaires de la surface.

1864. Sur le grand axe d'une ellipse, on décrit un cercle dans lequel on trace deux rayons OP, OQ faisant entre eux un angle constant : on projette P et Q en D et E sur l'ellipse : en D on élève perpendiculairement au plan de l'ellipse une droite de longueur constante h dont on joint l'extrémité au point E; lieu de cette dernière droite, quand l'angle constant POQ tourne autour de son sommet.

1865. Étant donnée une sphère, dont le rayon sera pris pour unité, et un cylindre droit ayant pour base une ellipse de même centre que la sphère, et dont les axes seront représentés par les constantes *sin.* a et *sin.* b, démontrer : 1° qu'il existe sur la sphère deux points F et F′ tels que la somme des arcs de grands cercles MF et MF′, aboutissant à un point quelconque M de la courbe d'intersection, est constante; 2° que ces deux arcs font des angles égaux avec la tangente au point M.

Construction graphique des deux points F et F′; examen du cas particulier où la somme MF+MF′ est égale à une demi-circonférence de grand cercle.

1866. I. — On donne deux paraboloïdes hyperboliques, semblables, semblablement placés et ayant le même axe principal. On mène à l'une de ces surfaces des plans tangents qui coupent l'autre suivant des hyperboles équilatères; on demande le lieu des points de contact de ces plans.

II. — Présenter géométriquement (dans la partie du cours relative aux courbes usuelles) les propriétés principales des diamètres conjugués et des cordes supplémentaires de l'ellipse.

1867. Une ellipse et une droite étant données dans un même plan, on

propose de trouver le lieu des points tels que les tangentes menées de chacun d'eux à l'ellipse interceptent sur la droite une longueur constante.

1868. Étant données dans un plan deux paraboles du deuxième degré, on les fait tourner autour de leurs sommets supposés fixes, de manière que, dans chacune de leurs positions, leurs quatre points d'intersection soient sur une circonférence, et l'on demande le lieu du centre de cette circonférence.

1869. On donne une série de surfaces du second ordre, homofocales et à centre : d'un point fixe P, pris dans l'un de leurs plans principaux, on abaisse des normales sur ces diverses surfaces, et l'on demande :

1° De trouver et de construire le lieu des pieds de ces normales;

2° De déterminer l'enveloppe des plans tangents menés aux surfaces par les pieds des normales.

1871 (1). On donne trois points fixes A, B, C : on demande de trouver le lieu des centres des ellipsoïdes de révolution pour lesquels ces trois points fixes sont les extrémités de trois diamètres conjugués.

1872. On donne deux droites fixes Δ et Δ' qui ne se rencontrent pas; par ces deux droites on fait passer des surfaces (S) du second ordre, pour lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de ces mêmes longueurs sont des quantités constantes et données.

1° Trouver le lieu des centres des surfaces (S).

2° Considérant une quelconque des surfaces (S) et le centre I de cette surface, on mène par le point I une droite rencontrant les deux droites fixes en D et D'; calculer la distance DD'.

3° Par les points D et D', on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites Δ et Δ'; trouver le lieu des intersections de ces plans.

1873. On donne un hyperboloïde à une nappe, sur lequel on prend une génératrice déterminée G. En un point quelconque P de cette génératrice, on mène la normale à la surface ; on suppose que cette normale, considérée comme un rayon incident, se réfléchit, suivant la loi connue, sur le plan de l'ellipse de gorge. On demande : 1° la surface engendrée par le rayon réfléchi, lorsque le point P se déplace sur la génératrice G ; 2° l'enveloppe des sphères ayant pour centre le point d'incidence et pour rayon la distance du point d'incidence au point P.

1874. On donne une ellipse et une hyperbole homofocales ; on imagine une conique quelconque C, doublement tangente *à chacune* des coniques données. On demande de trouver et de discuter le lieu des points de rencontre des tangentes à l'ellipse et à l'hyperbole aux points où ces courbes sont touchées par la conique variable C.

1875. A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du second ordre Σ, la courbe de contact étant l'intersection de l'ellipsoïde par

1. Il n'y a pas eu de concours en 1870.

un plan fixe P. On circonscrit ensuite à chaque surface Σ un cône ayant pour sommet un point donné A :

1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces Σ :

2° Classer les surfaces qui forment le lieu, quand on suppose le plan P fixe et le point A mobile dans l'espace.

(*On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point* A.)

1876. On donne une parabole P et un point H dont la projection orthogonale sur le plan de la parabole se fait au sommet de cette parabole :

1° Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole P et par le point H.

2° Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point A donné dans le plan Q, qui contient le point H et l'axe de la parabole P.

Classer les mêmes surfaces quand le point A se meut dans le plan Q.

1877. On donne un ellipsoïde et un point A :

1° Trouver un point B tel que, en menant par ce point un plan *quelconque* P, la droite AB soit toujours l'un des axes du cône qui a pour sommet le point A et pour base la section de l'ellipsoïde par le plan P.

2° Le problème a, en général, trois solutions : trouver pour quelles positions du point A le nombre des solutions devient infini.

3° Le point A restant fixe, on suppose que l'ellipsoïde se déforme de façon que les trois sections principales conservent les mêmes foyers, et l'on demande le lieu que décrit alors le point B.

1878. On donne une sphère S, un plan P et un point A ; par le point A, on mène une droite qui rencontre P en un point B ; puis sur AB comme diamètre on décrit une sphère S′ ; le plan radical des sphères S et S′ rencontre la droite AB en un point M.

1° Trouver le lieu décrit par le point M quand la droite AB tourne autour du point A.

2° Discuter le lieu précédent, en supposant que le point A se déplace dans l'espace, le plan P et la sphère S restant fixes.

1879. On donne un hyperboloïde à une nappe et un point A. On considère un paraboloïde circonscrit à l'hyperboloïde et tel que le plan P de la courbe de contact passe par A. Soit M le point d'intersection de ce paraboloïde avec celui de ses diamètres qui passe par A ; soit Q le point de rencontre de P avec la droite qui joint le point M au pôle du plan P, par rapport à l'hyperboloïde.

Le plan P tournant autour de A, on demande :

1° Le lieu du point M ;

2° Le lieu du point Q. Ce second lieu est une surface du second degré S, que l'on discutera en faisant varier la position du point A dans l'espace ;

3° Le lieu des positions que doit occuper le point A, pour que S soit de révolution.

1880. On donne un ellipsoïde et l'on considère un cône ayant pour base la section principale de l'ellipsoïde perpendiculaire à l'axe mineur ; ce cône coupe l'ellipsoïde suivant une seconde courbe située dans un plan Q.

1° Le sommet du cône se déplaçant dans un point donné P, trouver le lieu décrit par le pôle de R, par rapport à l'ellipsoïde.

2° Ce lieu est une surface du second degré Σ ; on demande de déterminer les positions du plan P pour lesquelles le cône asymptote de Σ a trois génératrices parallèles aux axes de symétrie de l'ellipsoïde.

3° Le plan P se déplaçant de façon que Σ satisfasse aux conditions précédentes, trouver le lieu des foyers des sections faites dans ces surfaces Σ par un plan fixe R perpendiculaire à l'axe mineur de l'ellipsoïde.

4° Trouver la surface engendrée par la courbe, lieu de ces foyers, quand le plan R se déplace, parallèlement à lui-même.

1881. On donne un ellipsoïde. On considère des droites D telles que si par chacune d'elles on mène des plans tangents à l'ellipsoïde, les normales aux points de contact, M et M′, soient dans un même plan. 1° Démontrer que la droite D et la droite des contacts MM′ sont rectangulaires ; 2° trouver le lieu des droites D qui passent par un point donné A ; 3° ce lieu est un cône du second degré ; trouver le lieu des positions du point A pour lesquelles ce cône est de révolution ; 4° trouver l'enveloppe C des droites D qui sont contenues dans un plan donné P, et trouver la surface S engendrée par C quand P se déplace parallèlement à un plan donné Q ; 5° trouver pour quelle direction de Q la surface S est de révolution.

1882. On donne une ellipse et un point P dans son plan :

1° Trouver le nombre des cercles osculateurs à l'ellipse tels que chacune des cordes communes à l'ellipse et à ses différents cercles passent par le point P ;

2° Trouver pour chacune des positions du point P combien de ces cercles sont réels ;

3° Démontrer que les points de contact de l'ellipse et des cercles osculateurs sont sur un même cercle C ;

4° Trouver l'enveloppe E des cercles C, quand le point P décrit l'ellipse donnée ;

5° La courbe E peut être considérée comme l'enveloppe d'une série de cercles qui coupent à angle droit un cercle fixe et dont les centres sont une conique. Chercher de combien de manières différentes est susceptible ce mode de génération.

1883. (V. *Géom. plane*, p. 635.)

1884. On donne une ellipse et une hyperbole situées respectivement dans deux plans rectangulaires P, Q et pour chacune desquelles la droite d'intersection des plans P et Q est un axe de symétrie.

1° On considère tous les plans R tangents à la fois à l'ellipse et à l'hyperbole et l'on propose de démontrer qu'il existe une infinité de surfaces du second ordre S tangentes à la fois à tous les plans R.

2° Trouver le lieu des centres des surfaces S et déterminer la nature de chacune de ces surfaces, suivant la position occupée par son centre.

3° Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les surfaces S soient homofocales.

FIN

ERRATA

Page 28, ligne 8. — Remplacez l'exposant 3 par l'exposant 2.
— 33 — 1. — *Au lieu de* (ξ, η, ζ, ν), *lisez* (ξ, η, ζ, τ).
— 30 — 1. — *Au lieu de* équation, *lisez* équations.
— 33 — 9. — (En remontant). *Au lieu de* équation, *lisez* équations.
— 89 — 13 et 15. — Remplacez les indices x, y, z, respectivement par X, Y, Z.
— 93 — 8. — (En remontant). *Au lieu de* $f' = 0$; *lisez* $f'_6 = 0$.
— 129 — 7. — (En remontant). *Au lieu de* A'C, *lisez* AC'.
— 149 — 7. — *Au lieu de* est connue, soient; *lisez* est connue. Soient.
— 198 — 11. — *Au lieu de* (A — S) (A' — S), *lisez* (A — S), (A' — S).
— 206 — 11. — (En remontant). *Au lieu de* '''S, *lisez* S'''.
— 216 — 10. — (En remontant). *Au lieu de* correspondent, *lisez* correspond.

ANGERS, IMPRIMERIE BURDIN ET C[ie], 4, RUE GARNIER.

